

OPTIMISATION DE FORMES POUR LA RÉSISTANCE DE VAGUES

Julien Dambrine¹,
Travail en collaboration avec : Evi Noviani¹, Morgan Pierre¹,
Germain Rousseaux²

1- Laboratoire de Mathématiques et Applications : CNRS / Université de Poitiers.

2- Institut Pprime : CNRS / Université de Poitiers & ENSMA.

Transport maritime :

- ▶ 80 % des marchandises mondiales ¹
- ▶ 2.5% des émissions de GES ²

Sources (principales) de résistance :

- ▶ Résistance frictionnelle
- ▶ Résistance liée l'émission de tourbillons
- ▶ **Résistance de vagues** (20% ³)



La résistance de vagues est très fortement influencée par la **forme de la coque**. Pour le transport fluvial, elle est associée au batillage (érosion des berges).

1. Review of maritime transport of the United Nations Conference on Trade and Development, 2015

2. McCollum, David, Gregory Gould, and David Greene, Greenhouse gas emissions from aviation and marine transportation : mitigation potential and policies, report of the Centre for Climate and Energy Solutions, 2009

3. The American Bureau of Shipping (ABS), Ship Energy Efficiency Measures : Status and Guidance, brochure, 2013.

LE MODÈLE DE NEUMANN-KELVIN

Hypothèses simplificatrices :

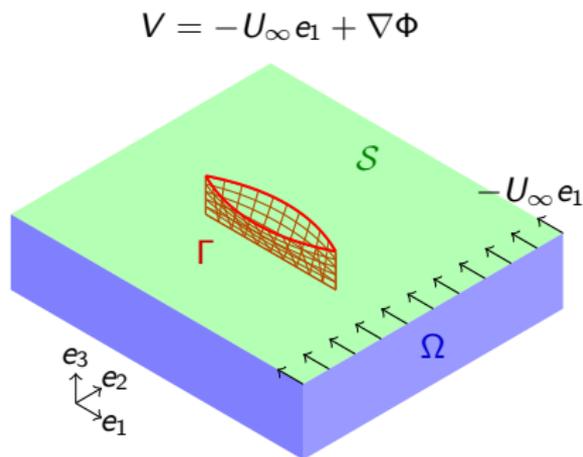
- ▶ Fluide parfait, incompressible
- ▶ Écoulement irrotationnel
- ▶ Régime linéaire de vagues
- ▶ Régime stationnaire

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\partial_{11}^2\Phi + \nu\partial_2\Phi = 0 \quad \text{on } \mathcal{S}$$

$$\partial_n\Phi = U_\infty n_1 \quad \text{on } \Gamma$$

$$|\nabla\Phi| \rightarrow 0 \quad \text{for } x_1, -x_2 \rightarrow \infty$$



On dispose d'une solution fondamentale :

$$2\pi \mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - y'|} - \frac{2\nu}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2(\theta) G(\theta, x - y') d\theta \right]$$

où : $G(\theta, x)$ est une fonction connue :

- ▶ Décroissante en amont du vecteur d'onde $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$
- ▶ Oscillante en aval à la fréquence $\nu \sec^2(\theta)$

LE MODÈLE DE NEUMANN-KELVIN

Hypothèses simplificatrices :

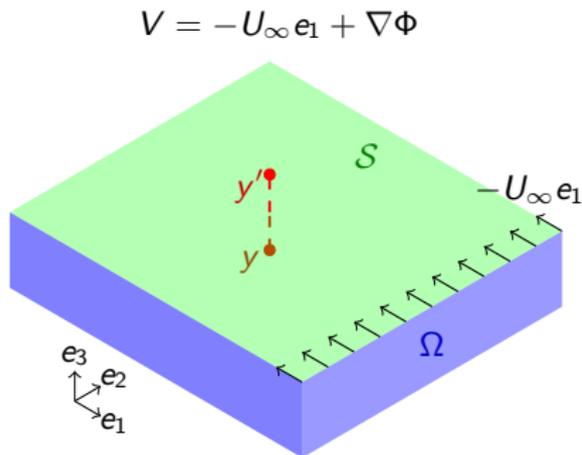
- ▶ Fluide parfait, incompressible
- ▶ Écoulement irrotationnel
- ▶ Régime linéaire de vagues
- ▶ Régime stationnaire

$$\Delta \Phi = \delta_y \quad \text{in } \Omega$$

$$\partial_{11}^2 \Phi + \nu \partial_2 \Phi = 0 \quad \text{on } \mathcal{S}$$

$$\partial_n \Phi = U_\infty n_1 \quad \text{on } \mathcal{O}$$

$$|\nabla \Phi| \rightarrow 0 \quad \text{for } x_1, -x_2 \rightarrow \infty$$



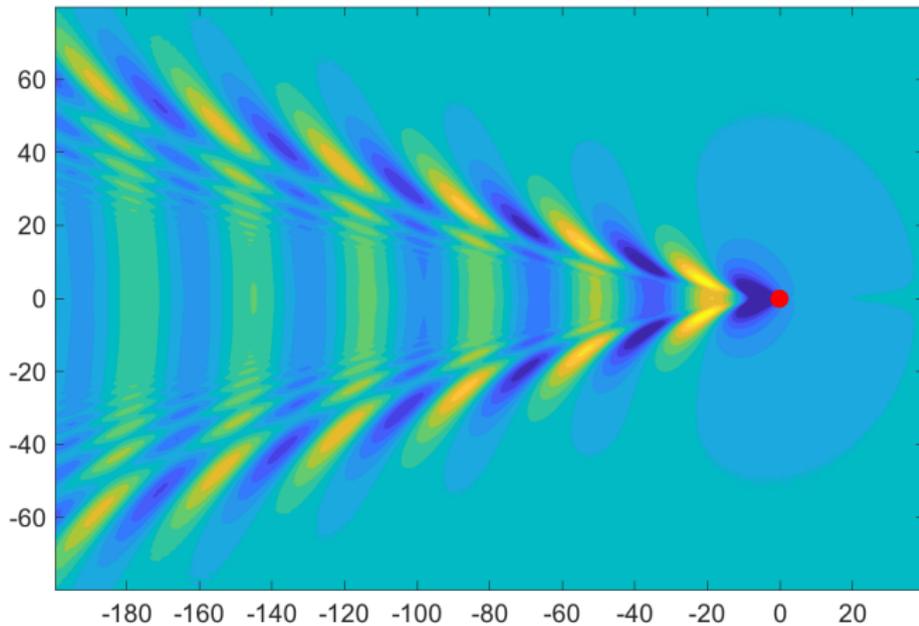
On dispose d'une solution fondamentale :

$$2\pi \mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - y'|} - \frac{2\nu}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2(\theta) G(\theta, x - y') d\theta \right]$$

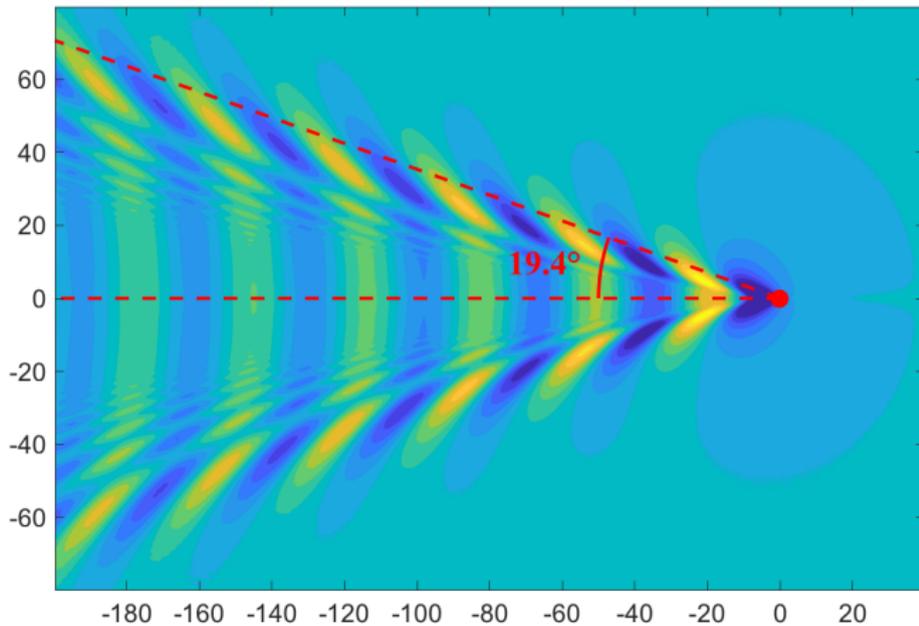
où : $G(\theta, x)$ est une fonction connue :

- ▶ Décroissante en amont du vecteur d'onde $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$
- ▶ Oscillante en aval à la fréquence $\nu \sec^2(\theta)$

$$y = (0, 0, -0.1)$$

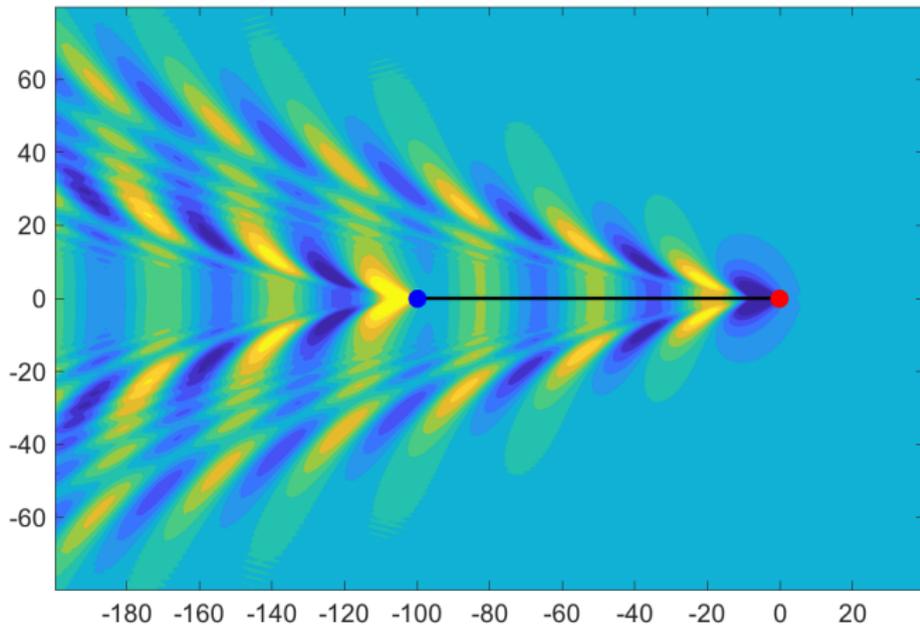


$$y = (0, 0, -0.1)$$



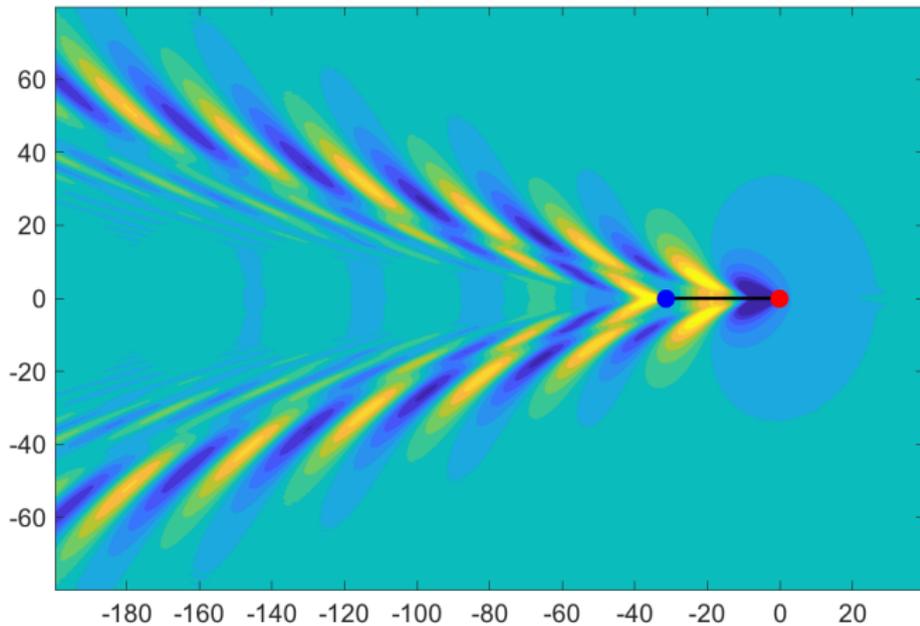
ILLUSTRATIONS DE SILLAGES ENGENDRÉS PAR DES SOURCES

$$y = (0, 0, -0.1) \quad y = (-100, 0, -0.1)$$



ILLUSTRATIONS DE SILLAGES ENGENDRÉS PAR DES SOURCES

$$y = (0, 0, -0.1) \quad y = (-2\pi/\nu, 0, -0.1)$$



MODÉLISATION DES BATEAUX PAR DES DISTRIBUTIONS

Une approche assez générale consiste à modéliser l'effet du navire par une distribution à support compact γ , et de récupérer le potentiel dans le **domaine fluide** avec, pour $x \in \Omega = {}^c\text{supp}(\gamma)$

$$\Phi(x) = \langle \gamma, \mathcal{G}(x, \cdot) \rangle \quad (1)$$

La distribution γ peut être de nature très différente : simple couche, double couche, ponctuelle, portée par Γ ou non...

Approche "obstacle solide" (cas où Γ n'affleure pas) : $\gamma = \alpha \delta_\Gamma$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = \int_\Gamma \alpha(y) \mathcal{G}(x, y) ds_y$$

et α doit satisfaire l'équation intégrale de frontière :

$$\forall x \in \Gamma, \quad \frac{1}{2} \alpha(x) - \int_\Gamma \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U_\infty n_1(x).$$

Approche "corps élancé" : Γ est donné par le graphe d'une fonction f à support compact (et dans la limite $\|f\|_{W_{1,\infty}} \rightarrow 0$) : $\gamma = 2U_\infty \partial_1 f \delta_{y=0}$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = 2U_\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 f(y_1, y_3) \mathcal{G}(x, (y_1, 0, y_3)) dy_1 dy_3$$

Une approche assez générale consiste à modéliser l'effet du navire par une distribution à support compact γ , et de récupérer le potentiel dans le **domaine fluide** avec, pour $x \in \Omega = {}^c\text{supp}(\gamma)$

$$\Phi(x) = \langle \gamma, \mathcal{G}(x, \cdot) \rangle \quad (1)$$

La distribution γ peut être de nature très différente : simple couche, double couche, ponctuelle, portée par Γ ou non...

Approche "obstacle solide" (cas où Γ n'affleure pas) : $\gamma = \alpha \delta_\Gamma$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = \int_\Gamma \alpha(y) \mathcal{G}(x, y) ds_y$$

et α doit satisfaire l'équation intégrale de frontière :

$$\forall x \in \Gamma, \quad \frac{1}{2} \alpha(x) - \int_\Gamma \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U_\infty n_1(x).$$

Approche "corps élancé" : Γ est donné par le graphe d'une fonction f à support compact (et dans la limite $\|f\|_{W_{1,\infty}} \rightarrow 0$) : $\gamma = 2U_\infty \partial_1 f \delta_{y=0}$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = 2U_\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 f(y_1, y_3) \mathcal{G}(x, (y_1, 0, y_3)) dy_1 dy_3$$

MODÉLISATION DES BATEAUX PAR DES DISTRIBUTIONS

Une approche assez générale consiste à modéliser l'effet du navire par une distribution à support compact γ , et de récupérer le potentiel dans le **domaine fluide** avec, pour $x \in \Omega = {}^c\text{supp}(\gamma)$

$$\Phi(x) = \langle \gamma, \mathcal{G}(x, \cdot) \rangle \quad (1)$$

La distribution γ peut être de nature très différente : simple couche, double couche, ponctuelle, portée par Γ ou non...

Approche "obstacle solide" (cas où Γ n'affleure pas) : $\gamma = \alpha \delta_\Gamma$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = \int_\Gamma \alpha(y) \mathcal{G}(x, y) ds_y$$

et α doit satisfaire l'équation intégrale de frontière :

$$\forall x \in \Gamma, \quad \frac{1}{2} \alpha(x) - \int_\Gamma \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U_\infty n_1(x).$$

Approche "corps élancé" : Γ est donné par le graphe d'une fonction f à support compact (et dans la limite $\|f\|_{W_{1,\infty}} \rightarrow 0$) : $\gamma = 2U_\infty \partial_1 f \delta_{y=0}$

$$\forall x \in \Omega, \quad \Phi(x) = 2U_\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 f(y_1, y_3) \mathcal{G}(x, (y_1, 0, y_3)) dy_1 dy_3$$

Une fois que Φ est connue, il est possible de calculer la résistance de vagues en intégrant la pression hydrodynamique sur Γ :

$$R_w = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} |U|^2 n_1 ds = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} |\nabla \Phi - U_{\infty} e_1|^2 n_1 ds$$

Un bilan des quantités de mouvement permet, à l'aide de l'étude du comportement lointain des solutions, de calculer la résistance de vagues directement en fonction de la distribution modélisant la carène⁴ :

$$R_w = \frac{\rho \nu^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2(\theta) |H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha)|^2 d\theta$$

où H est appelée fonction de Kochin

$$H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha) = \langle \gamma, x \mapsto e^{\nu \sec^2(\theta) [x_3 - i(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta))]} \rangle$$

où γ est la distribution modélisant la carène.

4. G. Delhommeau. Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités. Thèse d'état, 1987

Une fois que Φ est connue, il est possible de calculer la résistance de vagues en intégrant la pression hydrodynamique sur Γ :

$$R_w = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} |U|^2 n_1 ds = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} |\nabla \Phi - U_{\infty} e_1|^2 n_1 ds$$

Un bilan des quantités de mouvement permet, à l'aide de l'étude du comportement lointain des solutions, de calculer la résistance de vagues directement en fonction de la distribution modélisant la carène⁴ :

$$R_w = \frac{\rho \nu^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2(\theta) |H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha)|^2 d\theta$$

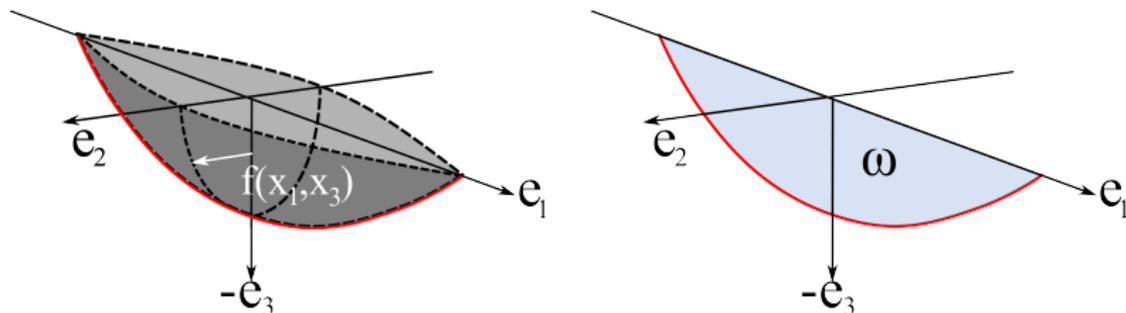
où H est appelée fonction de Kochin

$$H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha) = \langle \gamma, x \mapsto e^{\nu \sec^2(\theta)[x_3 - i(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta))]} \rangle$$

où γ est la distribution modélisant la carène.

4. G. Delhommeau. Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités. Thèse d'état, 1987

PARTIE I : CARÈNES ÉLANCÉES



Dans la limite de "carène élançée" :

$$|\partial_1 f|_\infty \rightarrow 0,$$

on remplace la condition aux limites sur le bord de la carène par une distribution de sources sur le plan (e_1, e_3) :

$$\gamma = 2U_\infty \partial_1 f \delta_\omega$$

et donc :

$$\Phi(x) = 2U_\infty \int_\omega \mathcal{G}(x, (y_1, 0, y_3)) \partial_1 f(y_1, y_3) dy_1 dy_3$$

LA FORMULE DE MICHELL

La connaissance de la solution du problème de Neumann-Kelvin fournit une expression analytique de la résistance de vagues directement en fonction de f . En utilisant l'expression de la résistance de vagues par les fonctions de Kochin, on a :

$$R_w = \frac{\rho \nu^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^2(\theta) |H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha)|^2 d\theta$$

avec

$$\begin{aligned} H(\theta, k_0 \sec^2(\theta), \alpha) &= \langle 2U_\infty \partial_1 f \delta_\omega, x \mapsto e^{\nu \sec^2(\theta)[x_3 - i(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta))]} \rangle \\ &= \int_\omega \partial_1 f(x_1, x_3) e^{\nu \sec^2(\theta)x_3 - i\nu \sec(\theta)x_1} dx_1 dx_3 \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variables $\lambda = \sec(\theta)$, et en intégrant par parties dans H , on obtient la formule de Michell⁵ :

$$R_w(f) = \frac{4\rho g \nu^3}{\pi} \int_1^\infty |I(\lambda, f)|^2 \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda,$$

avec :

$$I(\lambda, f) = \int_\omega f(x_1, x_3) e^{-\nu \lambda^2 x_3} e^{i\nu \lambda x_1} dx_1 dx_3.$$

5. J.H. Michell. The wave resistance of a ship, Phil. Mag. (1898).

LA FORMULE DE MICHELL

La connaissance de la solution du problème de Neumann-Kelvin fournit une expression analytique de la résistance de vagues directement en fonction de f . En utilisant l'expression de la résistance de vagues par les fonctions de Kochin, on a :

$$R_w = \frac{\rho\nu^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^2(\theta) |H(\theta, \nu \sec^2(\theta), \alpha)|^2 d\theta$$

avec

$$\begin{aligned} H(\theta, k_0 \sec^2(\theta), \alpha) &= \langle 2U_\infty \partial_1 f \delta_\omega, x \mapsto e^{\nu \sec^2(\theta)[x_3 - i(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta))]} \rangle \\ &= \int_\omega \partial_1 f(x_1, x_3) e^{\nu \sec^2(\theta)x_3 - i\nu \sec(\theta)x_1} dx_1 dx_3 \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variables $\lambda = \sec(\theta)$, et en intégrant par parties dans H , on obtient la formule de Michell⁵ :

$$R_w(f) = \frac{4\rho g\nu^3}{\pi} \int_1^\infty |I(\lambda, f)|^2 \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda,$$

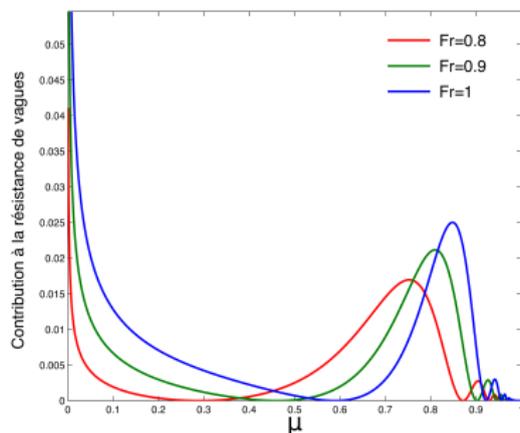
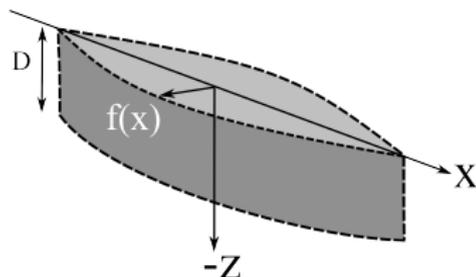
avec :

$$I(\lambda, f) = \int_\omega f(x_1, x_3) e^{-\nu\lambda^2 x_3} e^{i\nu\lambda x_1} dx_1 dx_3.$$

5. J.H. Michell. The wave resistance of a ship, Phil. Mag. (1898).

LA FORMULE DE MICHELL DÉCORTIQUÉE

On trace les contributions à l'intégrale de résistance de vagues en fonction de $\mu = \frac{\pi}{2} \tan^{-1}(\lambda - 1)$, pour une carène à forme simple (Wigley rectangulaire).



Fréquences
proches de g/U^2

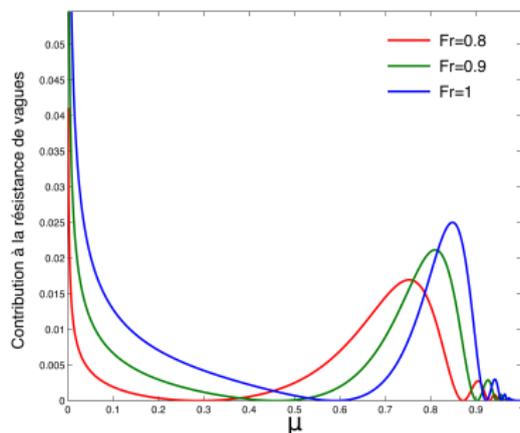
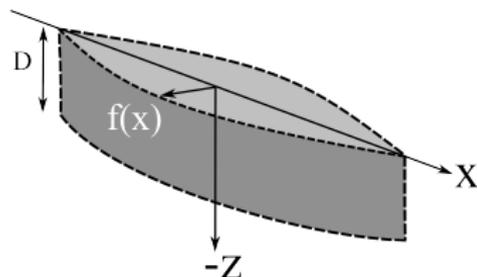
Hautes fréquences

Deux gammes de fréquence spatiale contribuent fortement à la résistance à l'avancement :

- ▶ les hautes fréquences,
- ▶ les fréquences proches de g/U^2

LA FORMULE DE MICHELL DÉCORTIQUÉE

On trace les contributions à l'intégrale de résistance de vagues en fonction de $\mu = \frac{\pi}{2} \tan^{-1}(\lambda - 1)$, pour une carène à forme simple (Wigley rectangulaire).



← Fréquences
proches de g/U^2

→ Hautes fréquences

Deux gammes de fréquence spatiale contribuent fortement à la résistance à l'avancement :

- ▶ les hautes fréquences,
- ▶ les fréquences proches de g/U^2

On peut ré-écrire la formule de Michell sous une forme alternative :

$$R_w = \int_{\omega} \int_{\omega} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f(x_1, x_3) f(y_1, y_3) dx_1 dx_3 dy_1 dy_3, \quad (2)$$

où le noyau \mathcal{K} est indépendant de la forme de la carène.

Dans notre cas, ce noyau s'écrit :

$$\mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) = \frac{4\rho g\nu^3}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} e^{-\nu(\lambda^2(x_3+y_3)+i\lambda(x_1-y_1))} d\lambda.$$

D'autres noyaux pour la résistance de vagues peuvent être définis suivant la situation :

- ▶ profondeur finie⁶, largeur finie⁷,
- ▶ stratification en densité⁸.

Remarque : avec la forme (2), la minimisation de la résistance de vagues revient à résoudre un **problème de programmation quadratique**

6. L.N. Sretensky, "Theory of wave resistance", Tr. TsAGI, (1937).

7. L.N. Sretensky, "On the wave-making resistance of a ship moving along in a canal", Philosophical Magazine (1936).

8. A.A. Hudimac, "Ship waves in a stratified ocean", JFM (1961)

On peut ré-écrire la formule de Michell sous une forme alternative :

$$R_w = \int_{\omega} \int_{\omega} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f(x_1, x_3) f(y_1, y_3) dx_1 dx_3 dy_1 dy_3, \quad (2)$$

où le noyau \mathcal{K} est indépendant de la forme de la carène.

Dans notre cas, ce noyau s'écrit :

$$\mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) = \frac{4\rho g \nu^3}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} e^{-\nu(\lambda^2(x_3+y_3)+i\lambda(x_1-y_1))} d\lambda.$$

D'autres noyaux pour la résistance de vagues peuvent être définis suivant la situation :

- ▶ profondeur finie⁶, largeur finie⁷,
- ▶ stratification en densité⁸.

Remarque : avec la forme (2), la minimisation de la résistance de vagues revient à résoudre un **problème de programmation quadratique**

6. L.N. Sretensky, "Theory of wave resistance", Tr. TsAGI, (1937).

7. L.N. Sretensky, "On the wave-making resistance of a ship moving along in a canal", Philosophical Magazine (1936).

8. A.A. Hudimac, "Ship waves in a stratified ocean", JFM (1961)

On peut ré-écrire la formule de Michell sous une forme alternative :

$$R_w = \int_{\omega} \int_{\omega} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f(x_1, x_3) f(y_1, y_3) dx_1 dx_3 dy_1 dy_3, \quad (2)$$

où le noyau \mathcal{K} est indépendant de la forme de la carène.

Dans notre cas, ce noyau s'écrit :

$$\mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) = \frac{4\rho g\nu^3}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} e^{-\nu(\lambda^2(x_3+y_3)+i\lambda(x_1-y_1))} d\lambda.$$

D'autres noyaux pour la résistance de vagues peuvent être définis suivant la situation :

- ▶ profondeur finie⁶, largeur finie⁷,
- ▶ stratification en densité⁸.

Remarque : avec la forme (2), la minimisation de la résistance de vagues revient à résoudre un problème de programmation quadratique

6. L.N. Sretensky, "Theory of wave resistance", Tr. TsAGI, (1937).

7. L.N. Sretensky, "On the wave-making resistance of a ship moving along in a canal", Philosophical Magazine (1936).

8. A.A. Hudimac, "Ship waves in a stratified ocean", JFM (1961)

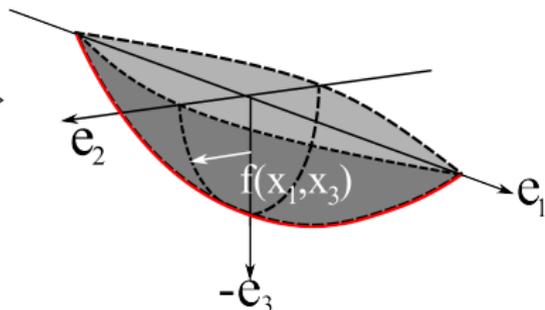
LE PROBLÈME D'OPTIMISATION À SUPPORT FIXE

On considère l'ensemble de contraintes suivant :

$$K = \left\{ f \in H^1(\omega), f|_{\partial\omega \cap \Omega} = 0 \mid f \geq 0, \int_{\omega} f = V \right\}$$

ce qui signifie que la carène doit être :

- ▶ à support dans ω (fixé).
- ▶ de volume constant



La minimisation de la résistance de vagues seule est un problème mal posé, il est nécessaire de régulariser la fonction objectif en pénalisant les carènes de surface trop grande. Notre problème de minimisation s'écrit alors :

$$\text{trouver } f \in K \text{ qui minimise : } \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2(\omega)} + R_w(f).$$

D'une certaine manière le terme régularisant modélise la résistance frictionnelle (proportionnelle à la surface mouillée).

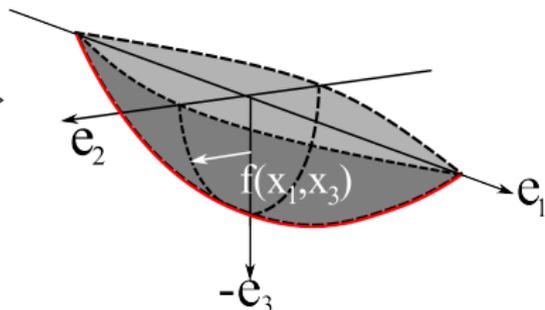
LE PROBLÈME D'OPTIMISATION À SUPPORT FIXE

On considère l'ensemble de contraintes suivant :

$$K = \left\{ f \in H^1(\omega), f|_{\partial\omega \cap \Omega} = 0 \mid f \geq 0, \int_{\omega} f = V \right\}$$

ce qui signifie que la carène doit être :

- ▶ à support dans ω (fixé).
- ▶ de volume constant



La minimisation de la résistance de vagues seule est un problème mal posé, il est nécessaire de régulariser la fonction objectif en pénalisant les carènes de surface trop grande. Notre problème de minimisation s'écrit alors :

$$\text{trouver } f \in K \text{ qui minimise : } \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2(\omega)} + R_w(f).$$

D'une certaine manière le terme régularisant modélise la résistance frictionnelle (proportionnelle à la surface mouillée).

RÉSULTATS THÉORIQUES (RÉSUMÉ)

Sur le problème régularisé, il est possible d'établir les résultats suivants⁹ :

Theorem

Le problème de minimisation de la résistance à l'avancement modifié ($\varepsilon > 0$) admet une unique solution, qui est, par ailleurs paire par rapport à f .

Nous avons également le résultat de continuité de la carène optimale par rapport à la vitesse :

Theorem

On note f^U la carène optimale au sens du problème ci-dessus, pour une vitesse U . Soit $\bar{U} > 0$. Alors, f^U converge vers $f^{\bar{U}}$ fortement dans H_0^1 lorsque $U \rightarrow \bar{U}$

On a de plus le résultat de régularité suivant :

Theorem

La solution du problème de minimisation appartient à $W^{2,p}$ pour $1 \leq p < \infty$, en particulier, elle est $C^1(\bar{\Omega})$.

9. J. Dambrine, M. Pierre, G. Rousseaux, A theoretical and numerical determination of optimal ship forms based on Michell's wave resistance, ESAIM : COCV, (2015)

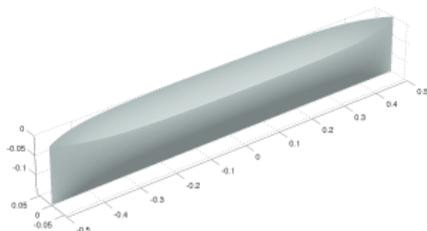
RÉSULTATS NUMÉRIQUES À SUPPORT FIXE : LE CAS "RÉALISTE"

On choisit ε de telle sorte que le terme de régularisation modélise la résistance de friction.

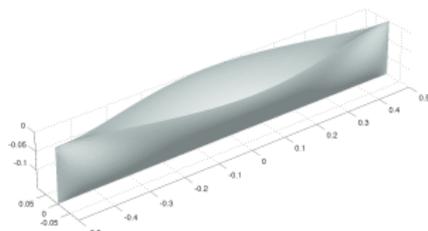
$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}},$$

Support rectangulaire

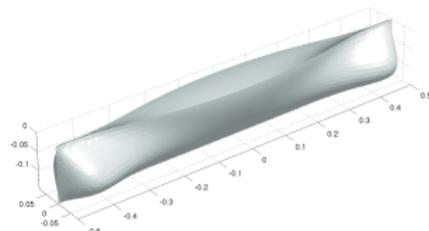
Fr = 0.01



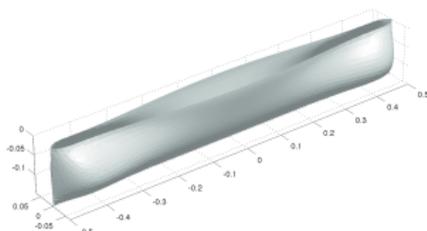
Fr = 0.3



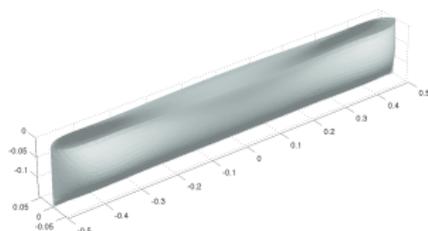
Fr = 0.5



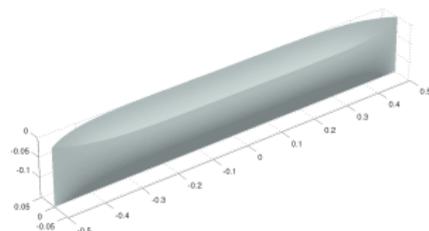
Fr = 0.7



Fr = 0.9



Fr = 3



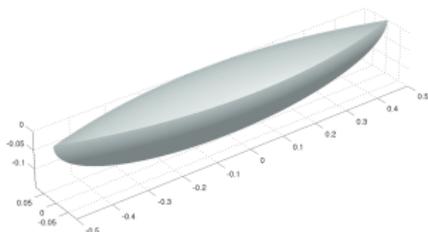
RÉSULTATS NUMÉRIQUES À SUPPORT FIXE : LE CAS "RÉALISTE"

On choisit ε de telle sorte que le terme de régularisation modélise la résistance de friction.

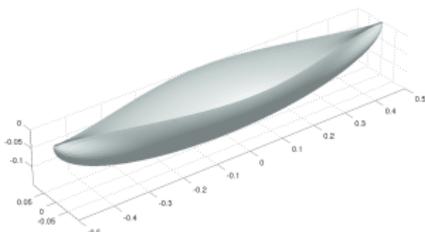
$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}},$$

Support elliptique

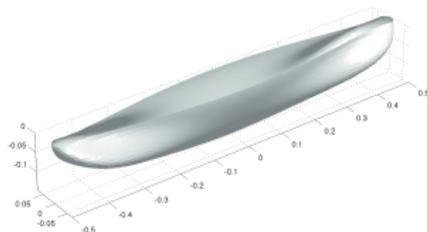
Fr = 0.01



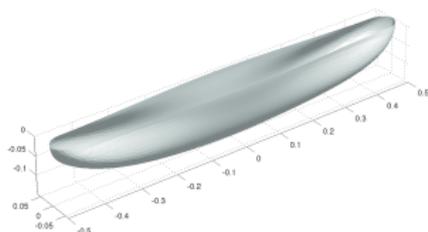
Fr = 0.3



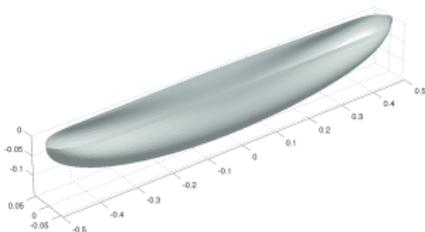
Fr = 0.5



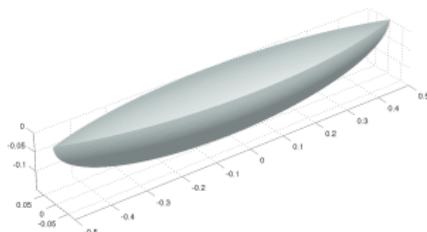
Fr = 0.7



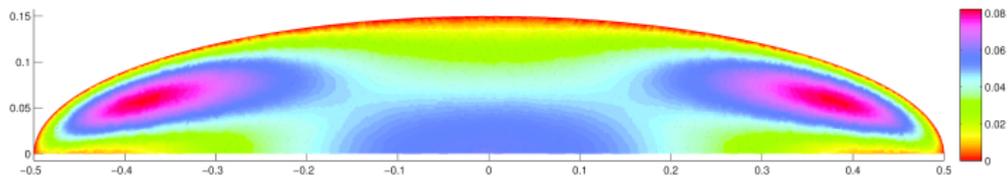
Fr = 0.9



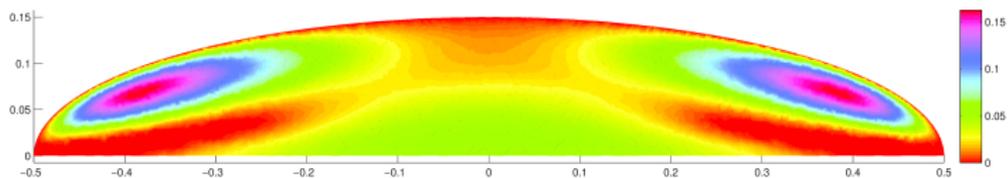
Fr = 3



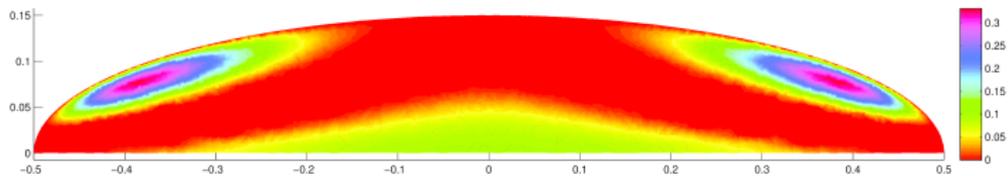
RÉSULTATS NUMÉRIQUES À SUPPORT FIXE : $Fr = 0.5$, $\varepsilon \rightarrow 0$



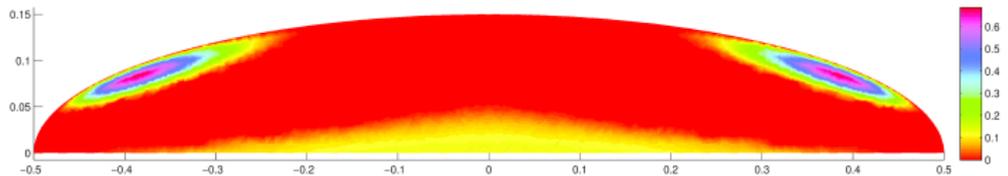
$$\varepsilon = 10^{-5}$$



$$\varepsilon = 10^{-6}$$

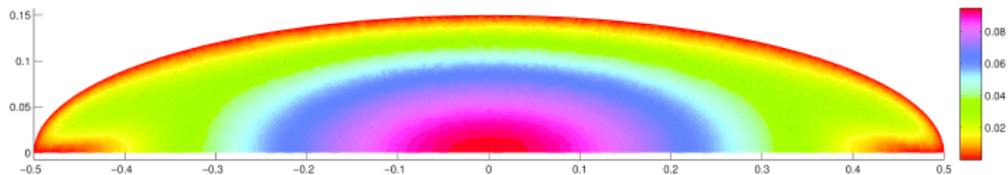


$$\varepsilon = 10^{-7}$$

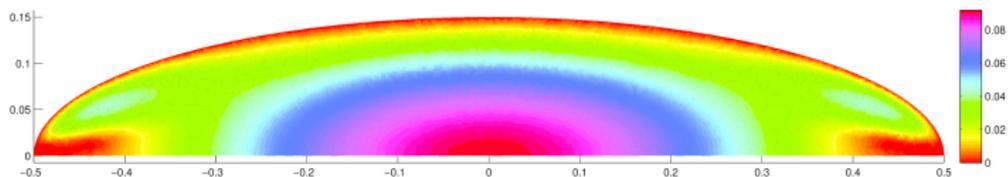


$$\varepsilon = 10^{-8}$$

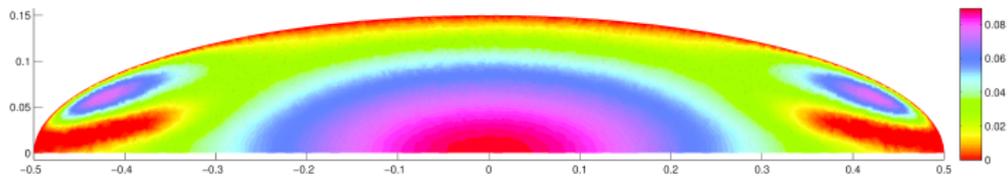
RÉSULTATS NUMÉRIQUES À SUPPORT FIXE : $Fr = 0.3$, $\varepsilon \rightarrow 0$



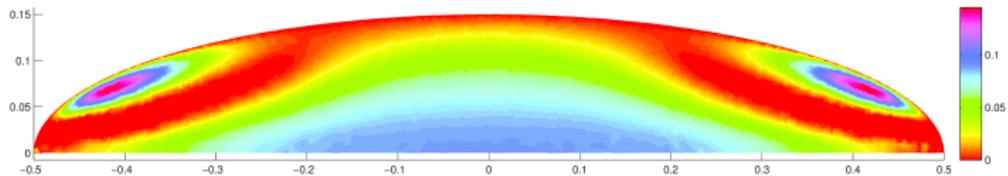
$$\varepsilon = 10^{-7}$$



$$\varepsilon = 10^{-8}$$



$$\varepsilon = 10^{-9}$$



$$\varepsilon = 10^{-10}$$

OPTIMISATION DU SUPPORT (1)

Jusqu'ici le support ω de la carène était fixé.

→ Peut-on également optimiser le support ?

Ceci conduit à un problème d'optimisation à deux niveaux :

Trouver : $\omega^* \in K_\omega \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ solution de

$$\min_{|\omega|=a} \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + R_\omega(\omega, f_\omega),$$

où :

$$f_\omega = \arg \min_{f \in K} \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2(\omega)} + R_\omega(\omega, f),$$

Pour simplifier le problème on symétrise le support ω par rapport à l'axe $x_3 = 0$:

OPTIMISATION DU SUPPORT (1)

Jusqu'ici le support ω de la carène était fixé.

→ Peut-on également optimiser le support ?

Ceci conduit à un problème d'optimisation à deux niveaux :

Trouver : $\omega^* \in K_\omega \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ solution de

$$\min_{|\omega|=a} \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + R_\omega(\omega, f_\omega),$$

où :

$$f_\omega = \arg \min_{f \in K} \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2(\omega)} + R_\omega(\omega, f),$$

Pour simplifier le problème on symétrise le support ω par rapport à l'axe $x_3 = 0$:

OPTIMISATION DU SUPPORT (1)

Jusqu'ici le support ω de la carène était fixé.

→ Peut-on également optimiser le support ?

Ceci conduit à un problème d'optimisation à deux niveaux :

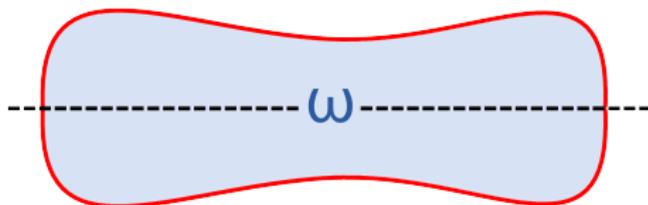
Trouver : $\omega^* \in K_\omega \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ solution de

$$\min_{|\omega|=a} \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + R_w(\omega, f_\omega),$$

où :

$$f_\omega = \arg \min_{f \in K} \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2(\omega)} + R_w(\omega, f),$$

Pour simplifier le problème on symétrise le support ω par rapport à l'axe $x_3 = 0$:



OPTIMISATION DU SUPPORT (2)

Si l'on se débarrasse de la contrainte de positivité, les conditions d'optimalité pour f_ω s'écrivent :

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta f_\omega + \int_\omega \mathcal{K}(\cdot, \cdot, y_1, y_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 = \mu, & \text{dans } \omega, \\ f_\omega = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (3)$$

où la constante μ est réglée de manière à avoir $\int_\omega f_\omega = 2V$.

Notre problème d'optimisation de formes devient :

Trouver ω^ tel que $|\omega^*| = a$, minimise l'énergie de Dirichlet associée à (3),*

où l'énergie de Dirichlet s'écrit ici :

$$D(\omega) = \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + \int_{\omega^2} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f_\omega(x_1, x_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 dx_1 dx_3.$$

Si on note f_ω^0 la solution de (3) pour $\mu = 1$, l'énergie de Dirichlet s'écrit :

$$D(\omega) = \frac{4V^2}{\int_\omega f_\omega^0}.$$

OPTIMISATION DU SUPPORT (2)

Si l'on se débarrasse de la contrainte de positivité, les conditions d'optimalité pour f_ω s'écrivent :

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta f_\omega + \int_\omega \mathcal{K}(\cdot, \cdot, y_1, y_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 = \mu, & \text{dans } \omega, \\ f_\omega = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (3)$$

où la constante μ est réglée de manière à avoir $\int_\omega f_\omega = 2V$.

Notre problème d'optimisation de formes devient :

Trouver ω^ tel que $|\omega^*| = a$, minimise l'énergie de Dirichlet associée à (3),*

où l'énergie de Dirichlet s'écrit ici :

$$D(\omega) = \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + \int_{\omega^2} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f_\omega(x_1, x_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 dx dz .$$

Si on note f_ω^0 la solution de (3) pour $\mu = 1$, l'énergie de Dirichlet s'écrit :

$$D(\omega) = \frac{4V^2}{\int_\omega f_\omega^0} .$$

Si l'on se débarrasse de la contrainte de positivité, les conditions d'optimalité pour f_ω s'écrivent :

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta f_\omega + \int_\omega \mathcal{K}(\cdot, \cdot, y_1, y_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 = \mu, & \text{dans } \omega, \\ f_\omega = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (3)$$

où la constante μ est réglée de manière à avoir $\int_\omega f_\omega = 2V$.

Notre problème d'optimisation de formes devient :

Trouver ω^ tel que $|\omega^*| = a$, minimise l'énergie de Dirichlet associée à (3),*

où l'énergie de Dirichlet s'écrit ici :

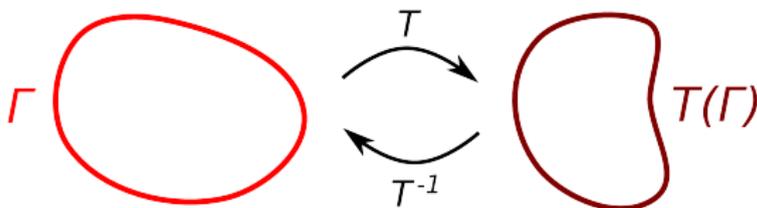
$$D(\omega) = \varepsilon \|\nabla f_\omega\|_{L^2(\omega)} + \int_{\omega^2} \mathcal{K}(x_1, x_3, y_1, y_3) f_\omega(x_1, x_3) f_\omega(y_1, y_3) dy_1 dy_3 dx dz.$$

Si on note f_ω^0 la solution de (3) pour $\mu = 1$, l'énergie de Dirichlet s'écrit :

$$D(\omega) = \frac{4V^2}{\int_\omega f_\omega^0}.$$

QUELQUES MOTS SUR LES DÉRIVÉES DE FORME

L'idée principale consiste à paramétriser localement ω à l'aide de petites déformations $T = Id + \theta$ engendrés par un champ de déplacement θ .



En développant $D((Id + \theta)(\omega))$ au premier ordre par rapport à θ , on obtient :

$$D((Id + \theta)(\omega)) = D(\omega) + \underbrace{D'(\omega)(\theta)}_{\text{"dérivée de formes"}} + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}}).$$

De plus, on peut construire un "gradient de forme" :

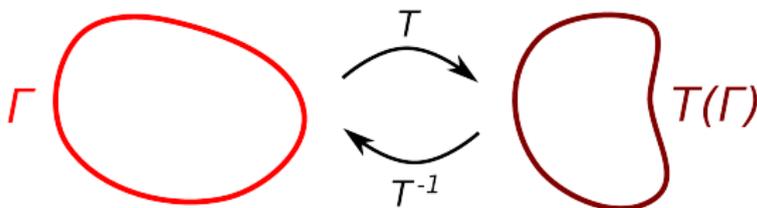
$$D'(\omega)(\theta) = \int_{\partial\omega} \nabla_{\omega} D(\omega) (\theta \cdot n) \, ds$$

Dans le cas de l'énergie de Dirichlet :

$$\nabla_{\omega} D(\omega) = -(\partial_n f_{\omega}|_{\partial\omega})^2$$

QUELQUES MOTS SUR LES DÉRIVÉES DE FORME

L'idée principale consiste à paramétriser localement ω à l'aide de petites déformations $T = Id + \theta$ engendrés par un champ de déplacement θ .



En développant $D((Id + \theta)(\omega))$ au premier ordre par rapport à θ , on obtient :

$$D((Id + \theta)(\omega)) = D(\omega) + \underbrace{D'(\omega)(\theta)}_{\text{"dérivée de formes"}} + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}}).$$

De plus, on peut construire un "gradient de forme" :

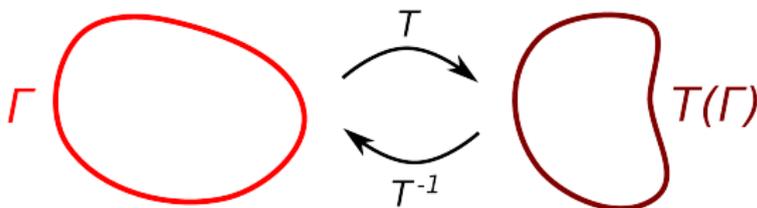
$$D'(\omega)(\theta) = \int_{\partial\omega} \nabla_{\omega} D(\omega) (\theta \cdot n) ds$$

Dans le cas de l'énergie de Dirichlet :

$$\nabla_{\omega} D(\omega) = -(\partial_n f_{\omega}|_{\partial\omega})^2$$

QUELQUES MOTS SUR LES DÉRIVÉES DE FORME

L'idée principale consiste à paramétriser localement ω à l'aide de petites déformations $T = Id + \theta$ engendrés par un champ de déplacement θ .



En développant $D((Id + \theta)(\omega))$ au premier ordre par rapport à θ , on obtient :

$$D((Id + \theta)(\omega)) = D(\omega) + \underbrace{D'(\omega)(\theta)}_{\text{"dérivée de formes"}} + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}}).$$

De plus, on peut construire un "gradient de forme" :

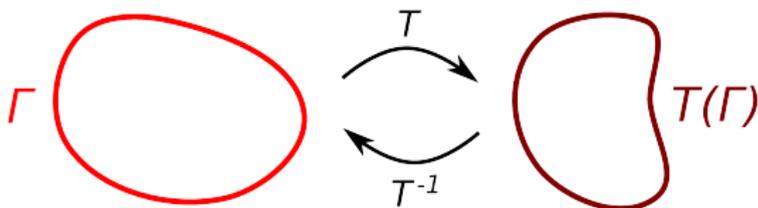
$$D'(\omega)(\theta) = \int_{\partial\omega} \nabla_{\omega} D(\omega) (\theta \cdot n) \, ds$$

Dans le cas de l'énergie de Dirichlet :

$$\nabla_{\omega} D(\omega) = -(\partial_n f_{\omega}|_{\partial\omega})^2$$

QUELQUES MOTS SUR LES DÉRIVÉES DE FORME

L'idée principale consiste à paramétriser localement ω à l'aide de petites déformations $T = Id + \theta$ engendrés par un champ de déplacement θ .



En développant $D((Id + \theta)(\omega))$ au premier ordre par rapport à θ , on obtient :

$$D((Id + \theta)(\omega)) = D(\omega) + \underbrace{D'(\omega)(\theta)}_{\text{"dérivée de formes"}} + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}}).$$

De plus, on peut construire un "gradient de forme" :

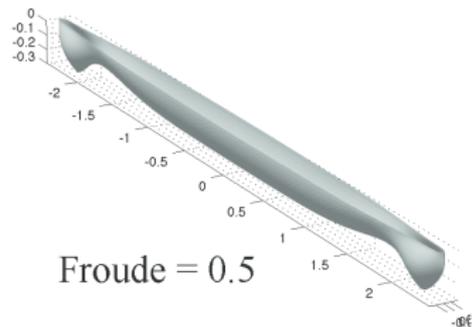
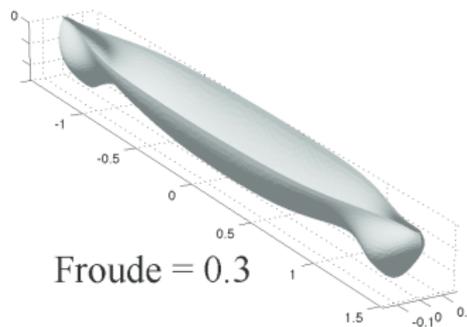
$$D'(\omega)(\theta) = \int_{\partial\omega} \nabla_{\omega} D(\omega) (\theta \cdot n) \, ds$$

Dans le cas de l'énergie de Dirichlet :

$$\nabla_{\omega} D(\omega) = -(\partial_n f_{\omega}|_{\partial\omega})^2$$

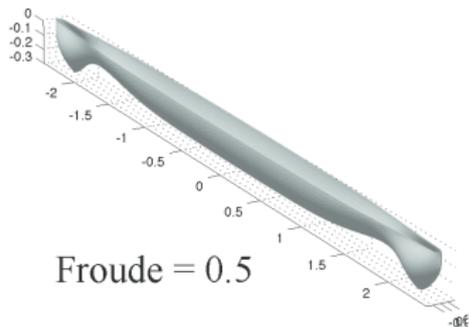
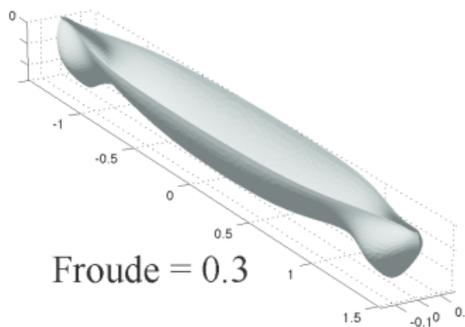
RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Comme auparavant, on fixe ε avec une valeur "réaliste" pour la résistance visqueuse.

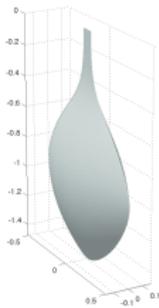
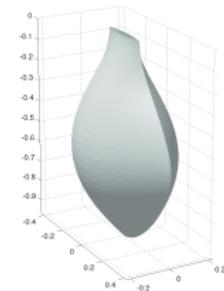
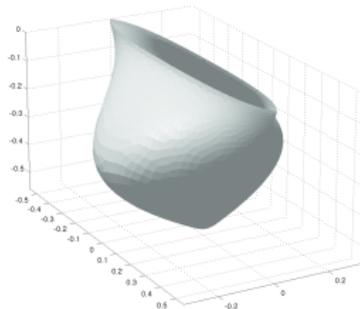
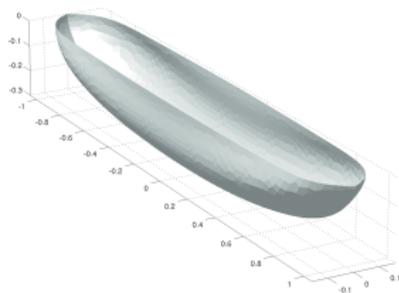


RÉSULTATS NUMÉRIQUES

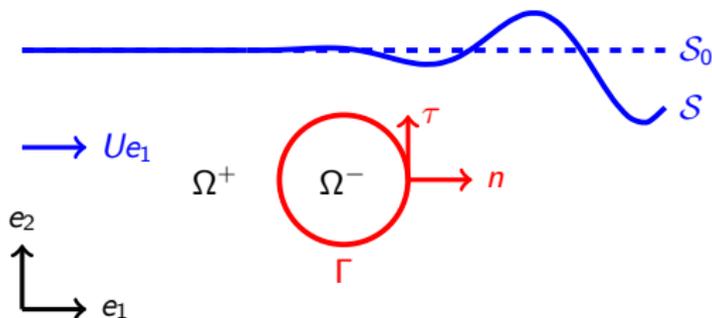
Comme auparavant, on fixe ε avec une valeur "réaliste" pour la résistance visqueuse.



Froude=0.75, différentes itération de l'algorithme :



PARTIE II : OBSTACLES CYLINDRIQUES



On choisit de représenter l'effet de la carène par une distribution de sources sur le bord de l'obstacle Γ : $\gamma = \alpha \delta_\Gamma$.

On a alors :

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y$$

où \mathcal{G} est la fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin 2D, et le potentiel de bord α est **pour le moment inconnu !**

RÉSISTANCE DE VAGUES POUR UN OBSTACLE CYLINDRIQUE

Comme auparavant, il est possible de déduire la résistance de vagues du comportement lointain en aval de la solution.

$$R_w = c \left| \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x) \alpha(x) ds_x \right|^2 \quad (4)$$

où, $\mathcal{E}(x) = e^{i\nu x_1 + \nu x_2}$, et l'on rappelle qu' α est le potentiel de bord associé aux sources :

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y$$

Si l'on souhaite assurer la condition $\partial_n \Phi = -U_{\infty} n_1$, α doit résoudre l'équation intégrale :

$$\frac{1}{2} \alpha(x) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U_{\infty} n_1(x), \quad \forall x \in \Gamma$$

Ainsi, la résistance de vagues dépend de la forme de deux manières :

- ▶ Il s'agit d'une intégrale sur Γ
- ▶ Elle fait intervenir le potentiel α qui dépend implicitement de Γ via l'équation intégrale ci-dessus.

DÉRIVÉE DE FORME POUR LA RÉISTANCE DE VAGUES

Un calcul long et pénible donne l'expression du gradient de forme :

$$\nabla_{\Gamma} R_w(\Gamma) = \left[\alpha(x) \int_{\Gamma} \alpha(y) \Re(\partial_n \mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) ds_y + \partial_{\tau} q(x) \partial_{\tau} \mathbb{S}(\alpha)(x) + \alpha(x) \partial_{\tau} \tilde{\mathbb{S}}(\partial_{\tau} q)(x) + U \partial_{\tau} q(x) \boldsymbol{\tau}(x) \cdot \mathbf{e}_1 \right].$$

où :

- ▶ \mathbb{S} and $\tilde{\mathbb{S}}$ sont des opérateurs dont les noyaux sont \mathcal{G} et $2\mathcal{G}(x, y) - \mathcal{G}(\bar{x}, y)$.
- ▶ α est solution de l'équation d'état :

$$\frac{1}{2} \alpha(x) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U n_1(x), \quad \forall x \in \Gamma$$

- ▶ q est solution de l'équation adjointe :

$$\frac{1}{2} q(y) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) q(x) ds_x = 2 \int_{\Gamma} \Re(\mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) \alpha(x) ds_x, \quad \forall y \in \Gamma$$

DÉRIVÉE DE FORME POUR LA RÉISTANCE DE VAGUES

Un calcul long et pénible donne l'expression du gradient de forme :

$$\nabla_{\Gamma} R_w(\Gamma) = \left[\alpha(x) \int_{\Gamma} \alpha(y) \Re(\partial_n \mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) ds_y + \partial_{\tau} q(x) \partial_{\tau} \mathbb{S}(\alpha)(x) \right. \\ \left. + \alpha(x) \partial_{\tau} \tilde{\mathbb{S}}(\partial_{\tau} q)(x) + U \partial_{\tau} q(x) \boldsymbol{\tau}(x) \cdot \mathbf{e}_1 \right].$$

où :

- ▶ \mathbb{S} and $\tilde{\mathbb{S}}$ sont des opérateurs dont les noyaux sont \mathcal{G} et $2\mathcal{G}(x, y) - \mathcal{G}(\bar{x}, y)$.
- ▶ α est solution de l'équation d'état :

$$\frac{1}{2} \alpha(x) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U n_1(x), \quad \forall x \in \Gamma$$

- ▶ q est solution de l'équation adjointe :

$$\frac{1}{2} q(y) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) q(x) ds_x = 2 \int_{\Gamma} \Re(\mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) \alpha(x) ds_x, \quad \forall y \in \Gamma$$

DÉRIVÉE DE FORME POUR LA RÉISTANCE DE VAGUES

Un calcul long et pénible donne l'expression du gradient de forme :

$$\nabla_{\Gamma} R_w(\Gamma) = \left[\alpha(x) \int_{\Gamma} \alpha(y) \Re(\partial_n \mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) ds_y + \partial_{\tau} q(x) \partial_{\tau} \mathbb{S}(\alpha)(x) \right. \\ \left. + \alpha(x) \partial_{\tau} \tilde{\mathbb{S}}(\partial_{\tau} q)(x) + U \partial_{\tau} q(x) \boldsymbol{\tau}(x) \cdot \mathbf{e}_1 \right].$$

où :

- ▶ \mathbb{S} and $\tilde{\mathbb{S}}$ sont des opérateurs dont les noyaux sont \mathcal{G} et $2\mathcal{G}(x, y) - \mathcal{G}(\bar{x}, y)$.
- ▶ α est solution de l'équation d'état :

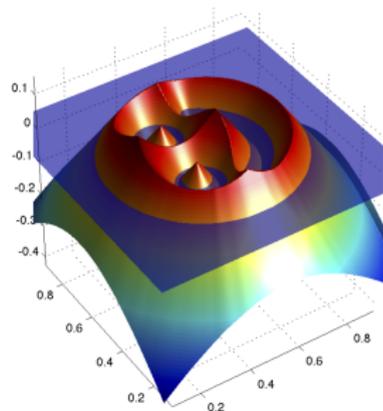
$$\frac{1}{2} \alpha(x) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) \alpha(y) ds_y = U n_1(x), \quad \forall x \in \Gamma$$

- ▶ q est solution de l'équation adjointe :

$$\frac{1}{2} q(y) - \int_{\Gamma} \partial_{n(x)} \mathcal{G}(x, y) q(x) ds_x = 2 \int_{\Gamma} \Re(\mathcal{E}(x) \overline{\mathcal{E}(y)}) \alpha(x) ds_x, \quad \forall y \in \Gamma$$

We choose to represent Γ via its signed distance function :

$$d(x) = \begin{cases} -\min_{y \in \Gamma} |x - y| & \text{if } x \in \Omega^- \\ \min_{y \in \Gamma} |x - y| & \text{if } x \in \Omega^+ \\ 0 & \text{if } x \in \Gamma \end{cases}$$



Features :

- ▶ construction solving the eikonal equation¹⁰ :

$$|\nabla d| = 1, \quad d|_{\Gamma} = 0$$

- ▶ normal vector : $\mathbf{n} = \nabla d$
- ▶ closest point mapping : $\Pi_{\Gamma} = \text{Id} - d \nabla d$
- ▶ normal displacements for one iteration : $d^{n+1} = d^n + \delta_t \theta \circ \Pi_{\Gamma}$

How about integration on Γ ?

10. Osher, S., R.Fedkiw, "Level Set Methods and Dynamics Implicit Surfaces. Springer", (2002)

C. Kublik *et. al.* proposed¹¹ a method of integration that benefits from the knowledge of the closest-point mapping.

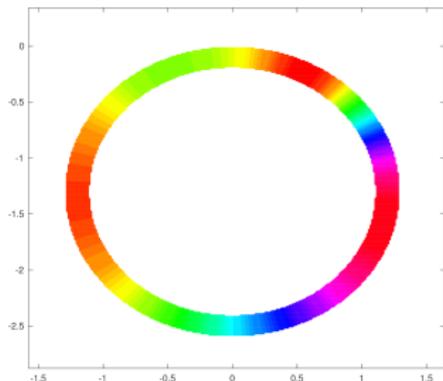
Using the co-area formula, they established :

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \Pi_{\Gamma}(x) J(x) \delta(d(x)) \, dx, \quad (5)$$

where $J = 1 - d\Delta d$, and δ is a function satisfying $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(s) \, ds = 1$, supported in $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

When solving boundary integral equations with (5), we recover boundary potentials that are already constant along normals !

They later exploited this fact to solve the Mullins-Sekerka problem¹²

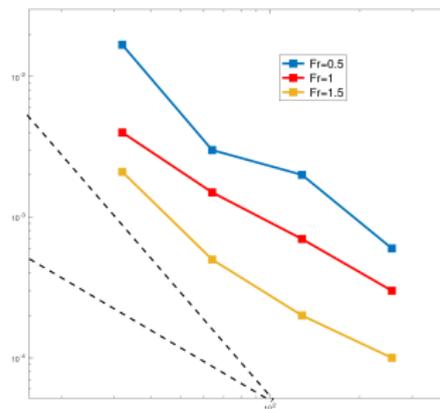
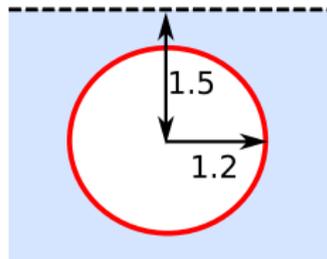


11. Kublik, C., Tanushev, N.M., Tsai, R. : An Implicit Interface Boundary Integral Method for Poisson's Equation on Arbitrary Domains. *J. Comput. Phys.* 247, 269-311 (2013)

12. C. Chen, C. Kublik, R. Tsai, "An Implicit Boundary Integral Method for Interfaces Evolving by Mullins-Sekerka Dynamics", *Mathematics for Nonlinear Phenomena – Analysis and Computation : In Honor of Yoshikazu Giga's 60th Birthday*, Sapporo, Japan, August 2015

VALIDATION ON THE METHOD ON NEUMANN-KELVIN (1)

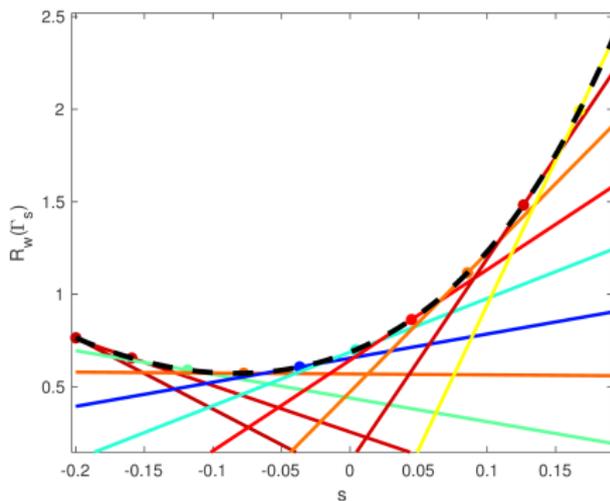
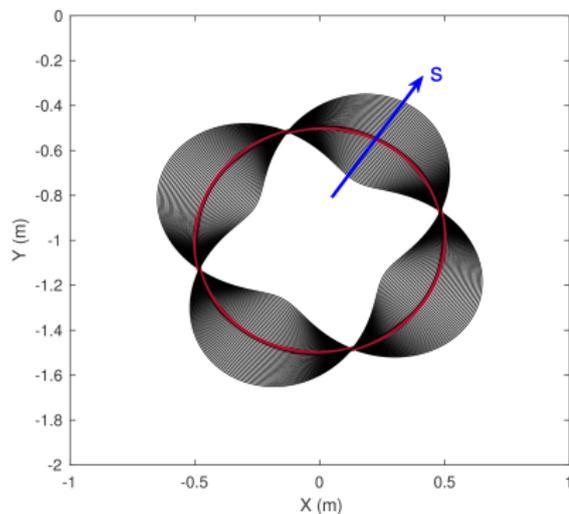
We use Havelock's exact solution for the immersed circular cylinder, we scale ϵ with the mesh (with a weight given by $|\nabla d|_1$, as in ¹³).



13. B Engquist, AK Tornberg, R Tsai, "Discretization of Dirac delta functions in level set methods" *Journal of Computational Physics* 207 (1), 28-51

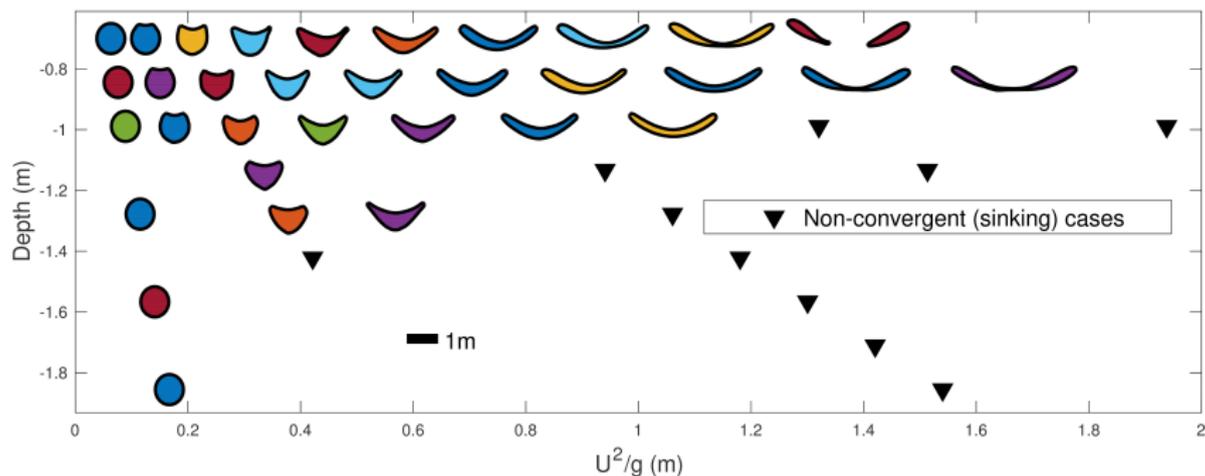
VALIDATION ON THE METHOD ON NEUMANN-KELVIN (2)

We impose a deformation $T_s = \text{Id} + s\theta_0$ on the shape depending on a parameter s , and we compare $R_w(T_s(\Gamma_0))$ (black dotted line) with its first order expansion at several points (coloured lines).



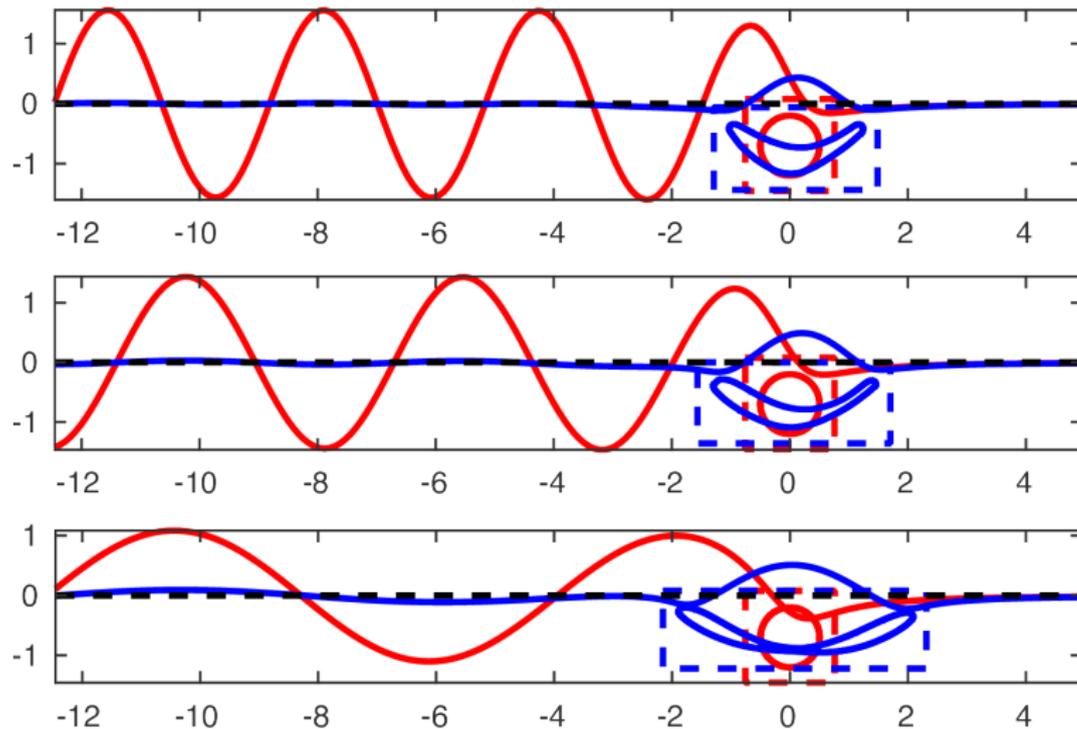
RESULTS

Locally optimal shapes of obstacle obtained with a shape gradient descent method (with a surface area constraint only), for various parameters (ν^{-1} and initial depth).



RESULTS

Comparison of the wake of the **initial** and **optimal** shapes of obstacles



PERSPECTIVES

La première approche nous permet d'obtenir des résultats intéressants, mais...

- ▶ elle est basée sur une approximation quand à la représentation de la carène,
- ▶ elle restreint les formes parcourues à des formes très spécifiques.

La deuxième approche est plus générale sur le plan de la représentation de l'obstacle, et permet également d'obtenir des résistances de vagues très faibles, mais...

- ▶ il est très difficile d'obtenir le moindre résultat théorique,
- ▶ l'extension en 3D sur un corps émergeant risque d'être difficile !!

Une troisième voie consisterait à laisser les sources libres, et à imposer que l'écoulement qu'elles engendrent contienne une inclusion fermée, sans spécifier explicitement de forme pour l'obstacle.

PERSPECTIVES

La première approche nous permet d'obtenir des résultats intéressants, mais...

- ▶ elle est basée sur une approximation quand à la représentation de la carène,
- ▶ elle restreint les formes parcourues à des formes très spécifiques.

La deuxième approche est plus générale sur le plan de la représentation de l'obstacle, et permet également d'obtenir des résistances de vagues très faibles, mais...

- ▶ il est très difficile d'obtenir le moindre résultat théorique,
- ▶ l'extension en 3D sur un corps émergeant risque d'être difficile !!

Une troisième voie consisterait à laisser les sources libres, et à imposer que l'écoulement qu'elles engendrent contienne une inclusion fermée, sans spécifier explicitement de forme pour l'obstacle.

PERSPECTIVES

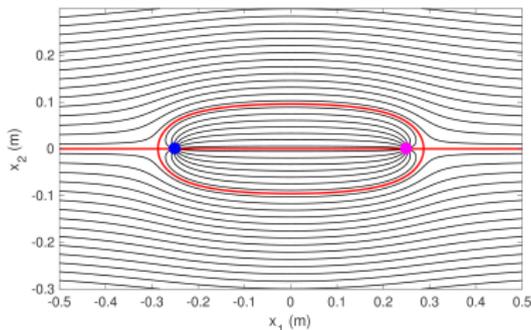
La première approche nous permet d'obtenir des résultats intéressants, mais...

- ▶ elle est basée sur une approximation quand à la représentation de la carène,
- ▶ elle restreint les formes parcourues à des formes très spécifiques.

La deuxième approche est plus générale sur le plan de la représentation de l'obstacle, et permet également d'obtenir des résistances de vagues très faibles, mais...

- ▶ il est très difficile d'obtenir le moindre résultat théorique,
- ▶ l'extension en 3D sur un corps émergeant risque d'être difficile !!

Une troisième voie consisterait à laisser les sources libres, et à imposer que l'écoulement qu'elles engendrent contienne une inclusion fermée, sans spécifier explicitement de forme pour l'obstacle.



MERCI POUR VOTRE ATTENTION !