Modélisation en interaction fluide structure par la méthode de Lattice Boltzmann

vers des approches monolithiques

Erwan Liberge
Travail en collaboration avec Claudine Béghein

LaSIE -UMR CNRS 7356 - La Rochelle Université

Journée Simulation Numérique et ses Applications MIRES/MARGAUx, NIORT, 25 septembre 2024

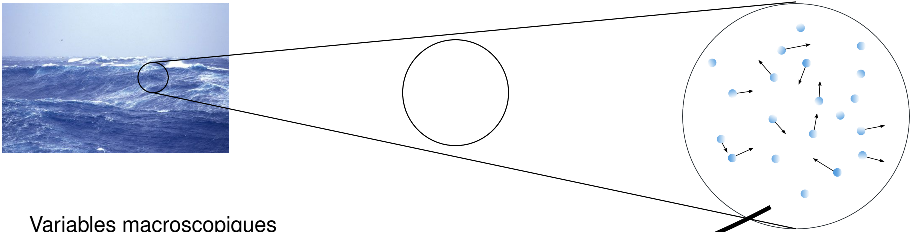
Pourquoi utiliser la méthode de Lattice Boltzmann ?

- Utilisée en CFD depuis les années 90
- Performances équivalentes aux éléments et volumes finis
- Peut être très rapide

Exemple d'un calcul LBM sur cartes graphiques (GPU)

Différentes échelles de modélisation

Echelle macroscopique | Echelle mésoscopique | Echelle microscopique



Variables macroscopiques

- $\rho\,(\mathbf{x}, t)$ masse volumique
- $\mathbf{v}\,(\mathbf{x}, t)$ vitesse
- $T\,(\mathbf{x}, t)$ Température
- $\cdots$

La méthode de Lattice Boltzmann (LBM) - Une approche mésoscopique

L'équation de Boltzmann - 1872

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f}_{\text{Propagation}} = \underbrace{\Omega\left(f\right)}_{\text{Collision}}$$

- $f\left(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t\right)$: densité de probabilité de trouver une particule à l'instant t à la position $\mathbf{x}$ ayant une vitesse $\mathbf{c}$.
- $\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f\left(\mathbf{c}\right) dc,\ \rho\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c}f\left(\mathbf{c}\right) dc,\ \rho E = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2 f\left(\mathbf{c}\right) dc\,;\ E = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + C_v T$
- $\Omega\left(f\right)$: opérateur de collision

La méthode de Lattice Boltzmann (LBM) - Une approche mésoscopique

L'équation de Boltzmann - 1872

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f}_{\text{Propagation}} = \underbrace{\Omega\left(f\right)}_{\text{Collision}}$$

- Chapmann-Enskog (1915) : lien avec l'équation de Navier-Stokes

$$f\left(\mathbf{c}\right) = f^{\mathrm{eq}}\left(\mathbf{c}\right) + \varepsilon f_1\left(\mathbf{c}\right) + \varepsilon^2 f_2\left(\mathbf{c}\right) + \cdots$$

Avec $\varepsilon = \dfrac{\text{Libre parcours moyen}}{\text{Dimension macroscopique caractéristique}}$

La méthode de Lattice Boltzmann (LBM) - Une approche mésoscopique

L'équation de Boltzmann - 1872

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f}_{\text{Propagation}} = \underbrace{\Omega\left(f\right)}_{\text{Collision}}$$

- Chapmann-Enskog (1915) : lien avec l'équation de Navier-Stokes
- $\Omega\left(f\right)$: modèle de Bathnagar - Gross - Krook (1954) (BGK)

$$\Omega\left(f\right) = -\frac{1}{\tau}\left(f - f^{\mathrm{eq}}\right)$$

- f^{eq} : Maxwell (1859)

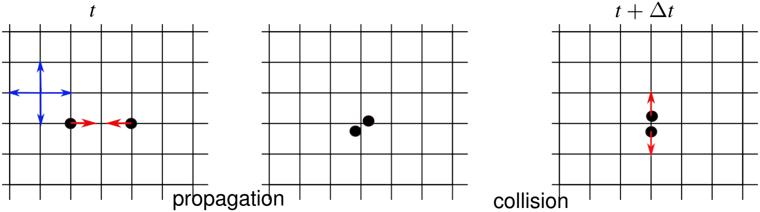
$$f^{\mathrm{eq}}\left(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t\right) = \frac{\rho}{2\pi k_b T} e^{-\frac{|\mathbf{c}-\mathbf{v}|}{2k_b T}} \; ; k_b \; : \; \text{Constante de Boltzmann}$$

- 1973 : Méthodologie de résolution à vitesse discrète (Renée Gatignole)

Vers la LBM

Petite disgression historique

- 1950 : Automates cellulaires (Newmann et Ulam)
- 1973 : Lattice Gas Automata (LGA) : Hardy, Pomeau et De Pazzis



$$n_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{c_i}\triangle t, t\right) = n_i\left(\mathbf{x}, t\right) + C_i\left(n\left(\mathbf{x}, t\right)\right); n_i\left(\mathbf{x}, t\right) = 0 \text{ ou } 1$$

$$f_i = \langle n_i \rangle; \quad \rho = \sum_i f_i; \quad \rho\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{c_i} f_i;$$

Respecte les lois de conservation, mais ne permet pas d'obtenir les équations de la dynamique des fluides (Navier-Stokes)

Vers la LBM

Petite disgression historique

- 1986 : Frish, Haslacher, Pomeau
  Augmentation des symétries du réseau $\Rightarrow$ obtient Navier-Stokes

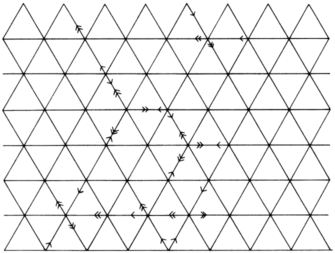
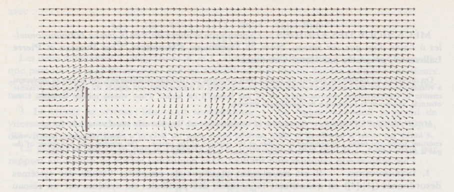


FIG. 1. Triangular lattice with hexagonal symmetry and hexagonal lattice-gas rules. Particles at time t and $t+1$ are marked by single and double arrows, respectively.

(a) Frish et al., 1986



1392 C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série II, n° 20, 1985

Fig. 1. — Ecoulement autour d'une plaque mince pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 70, après 5000 pas de temps. Les flèches représentent la direction et le module du flux aux nœuds d'un maillage 64 × 32.

Fig. 1. — Two dimensional low around a lat plate or a Reynolds number of order 70 after 5,000 time steps. The direction and modulus o arrows are proportional to the mass lux on a 64 × 32 grid.

(b) D'Humière et al. , 1985

Vers la LBM

Inconvénient de la LGA

- Bruit numérique
- Dépendance de la vitesse et de la pression

Vers la LBM

- 1988 : McNamara et Zanetti
  Utilisation de f_i au lieu de $n_i \Longrightarrow$ équation de Lattice Boltzmann

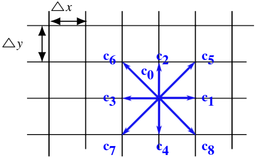
$$f_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{c_i}\triangle t, t\right)-f_i\left(\mathbf{x}, t\right)=\Omega_i\left(f\left(\mathbf{x}, t\right)\right)$$

- De 1988 à 1991 : évolution sur le réseau discret et l'opérateur de collision et f_i^{eq}
- 1991/1992 : La LBM actuelle - Schéma D*n*Q*b*

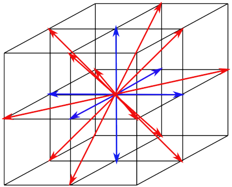
$$\Omega_i\left(f\left(\mathbf{x}, t\right)\right)=-\frac{1}{\tau}\left(f_i-f_i^{\mathrm{eq}}\right) \quad \text{et} \quad f_i^{\mathrm{eq}}=\omega_i \rho\left(1+\frac{\mathbf{c_i}\cdot\mathbf{v}}{c_s^2}+\frac{\left(\mathbf{c_i}\cdot\mathbf{v}\right)^2}{2c_s^4}-\frac{\mathbf{v}^2}{2c_s^2}\right)$$

Un outil de résolution des équations

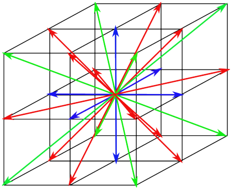
Navier-Stokes 2D et 3D : $f_i(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{c}_i,t)$, $\Omega_i(f) = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{eq}\right)$



D2Q9



D3Q19



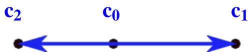
D3Q27

- $\rho = \sum_i f_i$ $\qquad p = \rho c_s^2 \qquad \frac{\mathbf{v}}{c_s} \ll 1 \qquad c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\rho\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{c_i} f_i$ $\qquad f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c_i}\cdot\mathbf{v}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c_i}\cdot\mathbf{v})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{v}^2}{2c_s^2}\right)$
- $\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{I} = \sum_i \mathbf{c_i}\mathbf{c_i} f_i$ $\qquad \nu = \frac{(2\tau - 1)}{6}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$

Un outil de résolution des équations de Navier-Stokes

Mais pas que ....

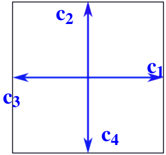
- Convection diffusion 1D : $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \alpha \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$



D1Q3

$$f_i^{\mathrm{eq}} = \omega_i \phi \left(1 + \mathbf{c_i} \cdot \mathbf{v}\right)$$

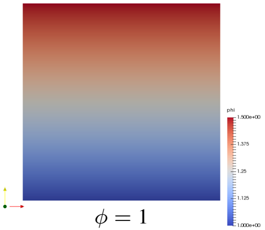
- Diffusion 2D : $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda \triangle \phi$



D2Q4

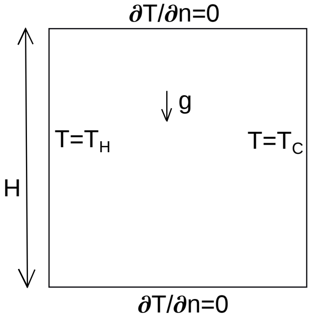
$$f_i^{\mathrm{eq}} = \omega_i \phi$$

$\phi = 1.5$



$\phi = 1$

Exemple : Convection naturelle



$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} - \boldsymbol{g}\beta(T - T_0)$$

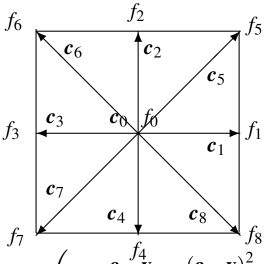
Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{T} = a \nabla^2 T$$

Exemple : Convection naturelle

Approche LBM

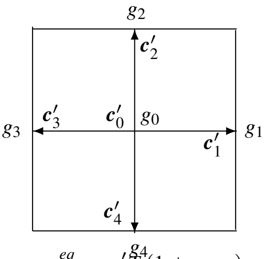
Modèle iD2Q9 pour Navier-Stokes



$$f_i^{\mathrm{eq}} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c_i} \cdot \mathbf{v}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c_i} \cdot \mathbf{v})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{v}^2}{2c_s^2} \right)$$

avec : $\nu = \frac{(2\tau - 1)}{6} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$

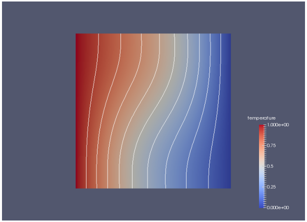
Modèle D2Q5 pour l'énergie

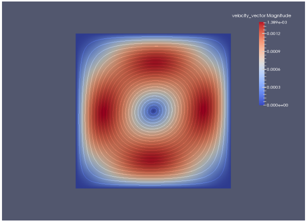


$$g_i^{eq} = \omega'_i T (1 + \mathbf{c_i} \cdot \mathbf{v})$$

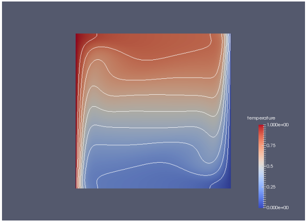
avec :$a = \frac{(2\tau' - 1)}{5} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$

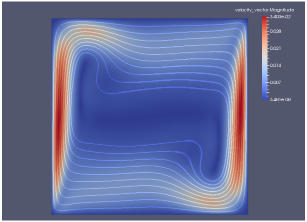
Convection Naturelle : Résultat $Pr = \nu/a = 0.71$





$Ra = 10^3$

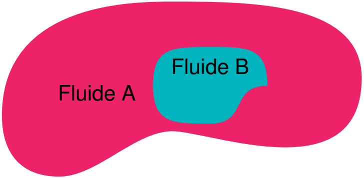




$Ra = 10^6$

LBM pour le multiphasique

Milieu biphasique



$$\phi = \begin{cases} \phi_A \text{ dans le fluide A} \\ \phi_B \text{ dans le fluide B} \end{cases}$$

$$W = \frac{4}{|\phi_A - \phi_B|}\sqrt{\frac{\kappa}{2\beta}}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{|\phi_A - \phi_B|^3}{6}\sqrt{2\kappa\beta}$$

- Landau free energy function

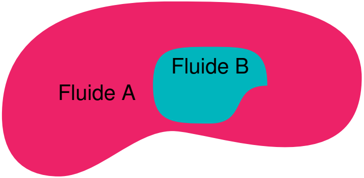
$$\Psi = \int_\Omega \left(\psi(\phi) + \frac{\kappa}{2}(\nabla\phi)^2\right) d\Omega$$

- Isothermal system :

$$\psi(\phi) = \beta(\phi - \phi_A)^2(\phi - \phi_B)^2$$

LBM pour le multiphasique

Milieu biphasique



$$\phi = \begin{cases} \phi_A \text{ dans le fluide A} \\ \phi_B \text{ dans le fluide B} \end{cases}$$

$$W = \frac{4}{|\phi_A - \phi_B|}\sqrt{\frac{\kappa}{2\beta}}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{|\phi_A - \phi_B|^3}{6}\sqrt{2\kappa\beta}$$

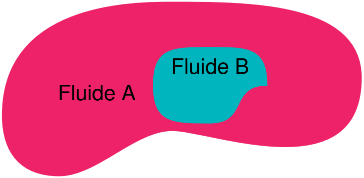
- équation de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) = M \triangle \mu_\phi$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_\phi &= \frac{\delta \Psi}{\delta \phi} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \kappa \triangle \phi \\ &= 4\beta\,(\phi - \phi_A)\,(\phi - \phi_B)\left(\phi - \overline{\phi_B}\right) \end{aligned}$$

Navier-Stokes + Cahn Hilliard



$$\phi = \begin{cases} \phi_A & \text{fluide A} \\ \phi_B & \text{fluide B} \end{cases}$$

$$W = \frac{4}{|\phi_A - \phi_B|}\sqrt{\frac{\kappa}{2\beta}}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{|\phi_A - \phi_B|^3}{6}\sqrt{2\kappa\beta}$$

- équation de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) = M \triangle \mu_\phi$$

- équations Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

LBM multiphasique

- 1 fonction de distribution pour les équations de Navier-Stokes

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \boldsymbol{v} = \sum_i f_i \boldsymbol{c}_i + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{f}$$

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right)$$

- 1 fonction de distribution pour l'équation de Cahn Hilliard

$$\phi = \sum_i g_i$$

$$M = \Gamma \left(\tau_\phi - \frac{\Delta t}{2} \right)$$

Γ : paramètre numérique

Zu et He (2013)

- schéma LBM pour l'équation de Cahn Hilliard
  - D2Q9

$$g_i(\boldsymbol{x}+\mathbf{c_i}, t+\triangle t) = g_i(\boldsymbol{x}, t) + \eta\left(g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{c_i}, t) - g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t)\right) - \frac{1}{\tau_\phi}\left(g_i(\boldsymbol{x}, t) - g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t)\right)$$

avec $\eta = 2\tau_\phi - 1$ et $M = q\left(\tau_\phi - \frac{1}{2}\right)\Gamma$

$$\sum g_i = \phi;\quad \sum \boldsymbol{c}_i g_i = \frac{1}{1-\eta}\phi\boldsymbol{v};\quad \sum \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{c}_i g_i = \frac{\Gamma\mu_\phi \boldsymbol{I}}{1-\eta}$$

- Navier Stokes : nouvelle approche

$$\sum f_i = 0;\quad \sum \boldsymbol{c}_i f_i = \boldsymbol{v};\quad \sum \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{c}_i f_i = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{I}$$

+ 2 forces volumiques ajoutées pour stabiliser :

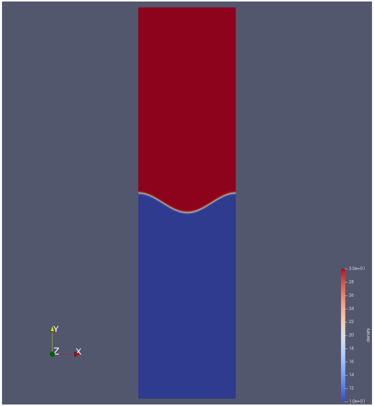
$\boldsymbol{f}_p = -p\nabla\rho$ and $\boldsymbol{f}_\mu = \left[\left(\tau - \frac{1}{2}\right)c_s^2\triangle t\right](\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla)\cdot\rho$

Application

Instabilité de Rayleigh-Taylor

$$A_t = \frac{\rho_A - \rho_B}{\rho_A + \rho_B} = 0.5,\ Re = \frac{\rho_A d^{3/2} g^{1/2}}{\nu} = 3000,$$

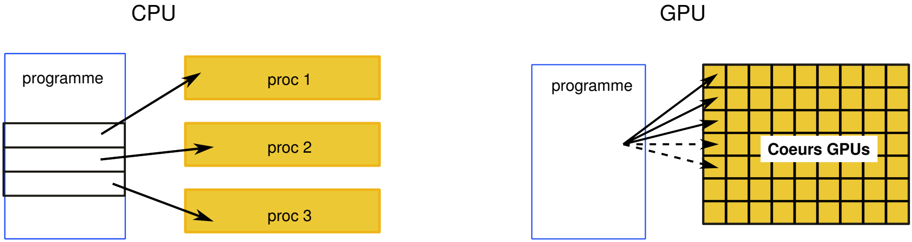
$$Pe = \frac{\sqrt{gd}W}{M\beta\left(\phi_A - \phi_B\right)^2} = 105,\ W = 5$$



LBM et calcul GPU

Le calcul sur carte graphique (GPU)

- Sur une carte graphique plusieurs centaines de processeurs
- CPU : optimisé pour le traitement en série / GPU : optimisé pour traiter de nombreuses tâches simultanées



LBM et calcul GPU

$f_i\left(\mathbf{x},t\right)=f\left(\mathbf{x},\mathbf{c}_i,t\right),\Omega_i\left(f\right)=-\frac{1}{\tau}\left(f_i-f_i^{\text{eq}}\right)$

$$f_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{c_i}\triangle t,t+\triangle t\right)-f_i\left(\mathbf{x},t\right)=-\frac{1}{\tau}\left(f_i\left(\mathbf{x},t\right)-f_i^{\text{eq}}\left(\mathbf{x},t\right)\right)$$

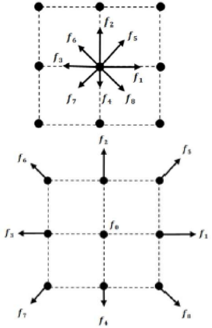
Algorithme de Lattice Boltzmann

- Etape de collision

$$\tilde{f}_i\left(x_j,t\right)=f_i\left(x_j,t\right)-\frac{1}{\tau}\left(f_i\left(x_j,t\right)-f_i^{\text{eq}}\left(x_j,t\right)\right)$$

- Etape de propagation (streaming)

$$f_i\left(x_j+\mathbf{c_i}\Delta t,t+\Delta t\right)=\tilde{f}_i\left(x_j,t\right)$$



LBM et calcul GPU

$f_i(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{c}_i,t)\,,\, \Omega_i(f) = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{\text{eq}}\right)$

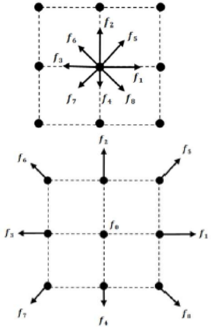
Algorithme de Lattice Boltzmann

- Etape de collision

$$\tilde{f}_i(x_j,t) = f_i(x_j,t) - \frac{1}{\tau}\left(f_i(x_j,t) - f_i^{\text{eq}}(x_j,t)\right)$$

- Etape de propagation (streaming)

$$f_i(x_j + \mathbf{c_i}\Delta t, t+\Delta t) = \tilde{f}_i(x_j,t)$$



- Mise à jour des grandeurs macroscopiques :

$$\rho(x_j,t+\Delta t) = \sum_i f_i(x_j,t+\Delta t) \quad \text{et} \quad \rho \boldsymbol{v}(x_j,t+\Delta t) = \sum_i \mathbf{c_i} f_i(x_j,t+\Delta t)$$

L'algorithme est efficace pour le calcul parallèle aussi bien sur des serveurs classiques (CPU) que sur des cartes graphiques (GPU)

Application à l'interaction fluide-structure(IFS)

Problématique

- Contraintes
  - LBM comme solveur fluide
  - Solveur externe pour la structure
  - Réseau cartésien fixe

Bref état de l'art

- Historiquement : une paroi solide renvoie les particules (Bounce Back)
  - Pour l'IFS : modification de la quantité de mouvement pour prendre en compte le déplacement de la paroi
  - Inconvénient : lourd à mettre en oeuvre
- Méthode des frontières immergées (IB)
- Couplage LBM et méthode Chimère (Mehdi *et al.*,2013)

En dehors du Bounce Back, adaptation des méthodes de CFD

La pénalisation volumique (thèse de M. Benamour, co-encadrée avec C. Béghein)

Principe - exemple sur l'équation de Navier-Stokes (Angot, 1999)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} - \frac{\mathbb{I}_{\Omega_s}}{\eta} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_s}) \end{aligned}$$

Avec

$$\mathbb{I}_{\Omega_s}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \qquad \eta \ll 1 \ \text{ coefficient de pénalisation}$$

Application à la LBM

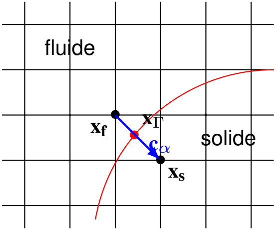
$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c_i} \triangle t, t + \triangle t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}\left(f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x}, t)\right) + \triangle t F_i$$

Avec

- $F_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \omega_i \left(\frac{\mathbf{c_i} - \boldsymbol{v}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{c_i} \cdot \boldsymbol{v}}{c_s^4} \mathbf{c_i}\right) \cdot \left(\frac{\mathbb{I}_{\Omega_s}}{\eta} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_s})\right)$
- $\rho \boldsymbol{v} = \sum_i \mathbf{c_i} f_i - \frac{\triangle t}{2} \left(\frac{\mathbb{I}_{\Omega_s}}{\eta} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_s})\right) \Rightarrow \boldsymbol{v} = \dfrac{\sum_i \mathbf{c_i} f_i + \frac{\triangle t}{2} \frac{\mathbb{I}_{\Omega_s}}{\eta} \boldsymbol{v_s}}{\rho + \frac{\triangle t}{2} \frac{\mathbb{I}_{\Omega_s}}{\eta} \rho}$

Calcul des efforts fluides sur la structure

Momemtum Exchange Method



Interface non conforme au mailage cartésien : Exemple d'un noeud fluide frontière $\mathbf{x_f}$, son image dans le domaine solide $\mathbf{x_s}$, et le point d'intersection avec l'interface $\mathbf{x}_\Gamma$

En $\mathbf{x}_\Gamma$ l'effort fluide ponctuel est défini par

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_\Gamma\right) = \left(\mathbf{c}_\alpha - \mathbf{v}_\Gamma\right)\tilde{f}_\alpha\left(\mathbf{x_f}\right) - \left(\mathbf{c}_{\overline{\alpha}} - \mathbf{v}_\Gamma\right)\tilde{f}_{\overline{\alpha}}\left(\mathbf{x_s}\right) \tag{3}$$

La force totale agissant au centre de gravité et le moment sont

$$\mathcal{F}_f = \sum \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_\Gamma\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_f = \sum \left(\mathbf{x}_\Gamma - \mathbf{x_G}\right) \times \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_\Gamma\right), \tag{4}$$

avec $\mathbf{x_G}$ les coordonnées du centre de gravité.

Calcul des efforts fluides sur la structure

Stress Integration Method

Inspirée des méthodes habituelles de calcul des contraintes en CFD

$$\mathcal{F}_f = \int_{\partial\Omega_s} \sigma \cdot \mathbf{n} dS \text{ and } \mathcal{T}_f = \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{r} \times \sigma \cdot \mathbf{n} dS \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma &= -pI_d + \nu \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \\ &= -\rho c_s^2 I_d - \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left(\sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha \left(f_\alpha - f_\alpha^{eq} \right) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

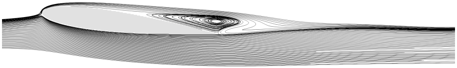
et $\mathbf{n}$ la normale extèrieure au domaine solide.
L'équation (5) devient :

$$\mathcal{F}_f = \sum_i S_i \sigma \left(\mathbf{x_i} \right) \cdot \mathbf{n_i} \tag{7}$$

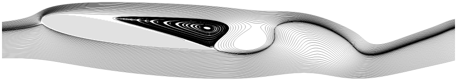
S_i et $\mathbf{n_i}$ sont les surfaces d'intégrations et les normales sortantes des points d'intégrations $\mathbf{x_i}$ disséminés sur l'interface fluide-solide.

Calcul des efforts fluides sur la structure

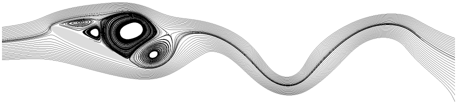
Comparaison - Naca 0012 à Re=1000



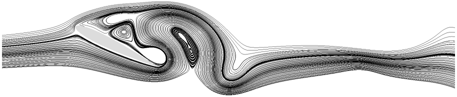
$\alpha = 7°$



$\alpha = 10°$



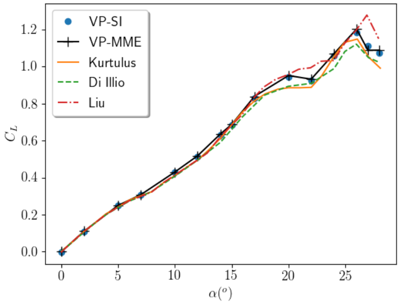
$\alpha = 24°$



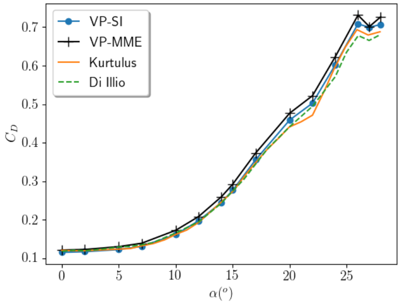
$\alpha = 26°$

Calcul des efforts fluides sur la structure

Comparaison - Naca 0012 à Re=1000



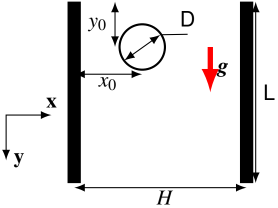
Coefficient de portance

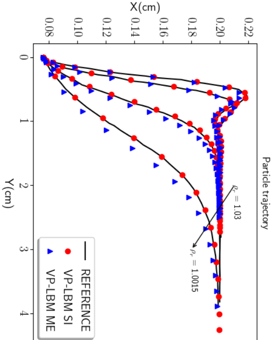


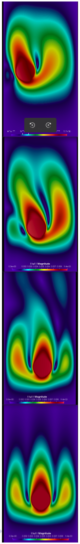
Coefficient de trainée

Calcul des efforts fluides sur la structure

Sédimentation d'une particule dans un canal

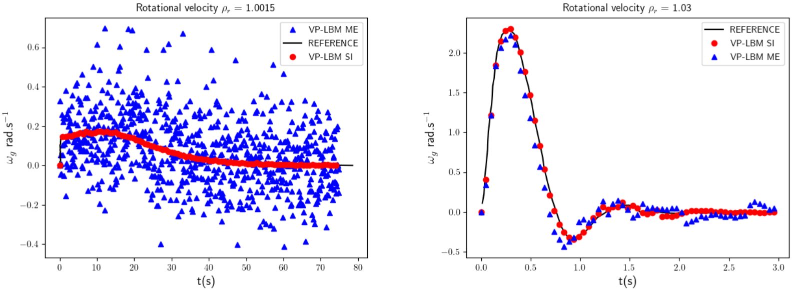






Calcul des efforts fluides sur la structure

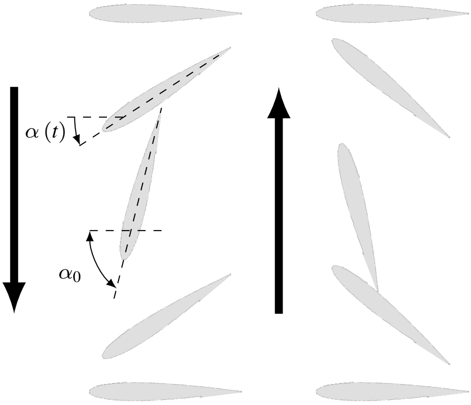
Sédimentation d'une particule dans un canal



Vitesse de rotation de la particule

Application 1 - Déplacement imposé en translation et rotation d'un Naca 0015

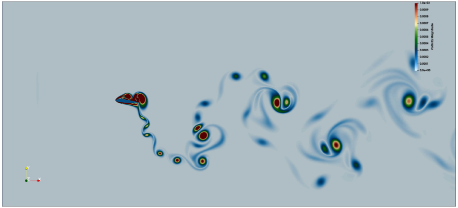
Système d'extraction d'énergie proposé par Kinsey and Dumas (2008) https://www.hydrolienne.fsg.ulaval.ca/videos/



Déplacement imposé :

$$\begin{aligned} y\,(t) &= Y_0 \sin\left(\gamma t + \phi\right) \\ \alpha\,(t) &= \alpha_0 \sin\left(\gamma t\right) \end{aligned}$$

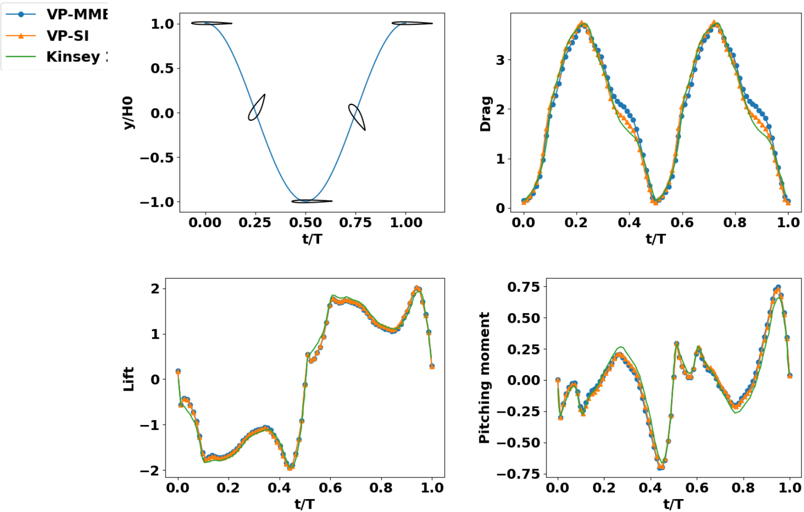
with $\phi = \frac{\pi}{2}$ and $\alpha_0 = 76°$



Vorticité calculée par la méthode LBM - pénalisation volumique

Application 1 - Déplacement imposé en translation et rotation d'un Naca 0015

Système d'extraction d'énergie proposé par Kinsey and Dumas (2008) https://www.hydrolienne.fsg.ulaval.ca/videos/

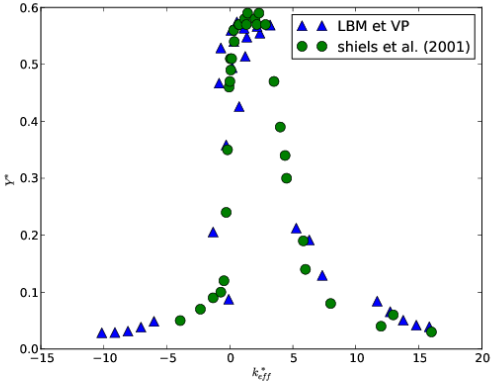


LBM et pénalisation Volumique

Oscillation libre à Reynolds 100

- Equation du cylindre

$$m\ddot{Y} + k\,(Y - Y_{\text{eq}}) = \mathcal{F}_y$$



- Equation adimensionnelle

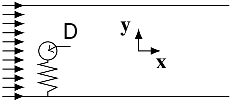
$$m^*\ddot{Y}^* + k^*\left(Y^* - Y^*_{\text{eq}}\right) = C_L$$

- Adimensionalisation (shiels *et al.*)

$$Y^* = \frac{Y}{D} \qquad m^* = \frac{m}{0.5\rho D^2}$$

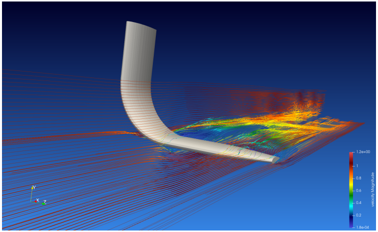
$$k^* = \frac{k}{0.5\rho \mathbf{V_0}^2} \qquad t^* = t\,\frac{\mathbf{V_0}}{D}$$

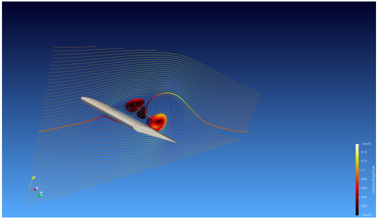
$$k^*_{\text{eff}} = k^* - m^*{\omega^*}^2$$



Conclusion sur le couplage LBM - Penalisation Volumique

- En comparaison des autres méthodes d'IFS pour Lattice Boltzmann
  - Performances équivalentes
  - Facilité d'ajout d'un solide
- Perspectives
  - Rajout de la pénalisation volumique dans le cadre de la turbulence





Calculs laminaires 3D via LBM-VP implémentés dans le code LBM opensource *Palabos*

Evolution pour des structures déformables

Objectif de ce travail : utiliser une formulation multiphasique

- Etendre les équations de Navier-Stokes au domaine structure
- Formulation adaptée pour exprimer les contraintes du domaine solide en eulérien
- Suivi des domaines par fonction caractéristique, Level-Set, interfaces diffuses $\cdots$

LBM pour les solides déformables

Formulation mathématique

- Equations de Navier-Stokes sur $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma_I$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = \nabla\cdot\sigma + \mathbf{f}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

avec

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_f H(\phi) + \rho_s(1 - H(\phi))\\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_f H(\phi) + \boldsymbol{v}_s(1 - H(\phi))\\ \sigma &= \sigma_f H(\phi) + \sigma_s(1 - H(\phi))\end{aligned} \quad \text{et } H(\phi) = \begin{cases} 1 \text{ in } \Omega_f \\ 0 \text{ in } \Omega_s \end{cases}$$

- Choix pour ϕ : équation de Cahn-Hilliard

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{v}) = M\triangle\mu_\phi} \text{ avec } \mu_\phi = 4\beta\left(\phi - \phi_f\right)\left(\phi - \phi_s\right)\left(\phi - \overline{\phi}\right)$$

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ dans } \Omega_f \\ -1 \text{ dans } \Omega_s \end{cases} ;\, W = \frac{4}{|\phi_f - \phi_s|}\sqrt{\frac{\kappa}{2\beta}} ;\, \sigma = \frac{|\phi_f - \phi_s|^3}{6}\sqrt{2\kappa\beta}$$

E. Liberge, C. Béghein, *A Lattice Boltzmann approach for the fluid-structure interaction of a neo-Hookean medium*, Physical Review E, 2022

Formulation pour un solide néo-hookéen incompressible

- les opérateurs de discrétisation sont en eulérien

$$\begin{cases} \rho_s \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \rho_s \left(\boldsymbol{v}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_s\right) - \nabla \cdot \sigma_s = \mathbf{f}_s \text{ in } \Omega_s \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}_s = 0 \end{cases}$$

avec

$$\sigma_s = -p_s Id + \alpha_s \left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - Id\right) \qquad ; \alpha_s : \text{coefficient de Lamé} \tag{8}$$

et

$$\mathbf{F} = (Id - \nabla \mathbf{d})^{-1} \tag{9}$$

$\mathbf{d}$: champ de déplacement

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s \cdot \nabla \mathbf{d} = \boldsymbol{v}_s \ \text{ dans } \Omega_s \tag{10}$$

Formulation LBM pour un solide néo-hookéen incompressible

Contraintes "fluide"

$$\tilde{\sigma}_f = -p_s Id + \underbrace{2\mu_f \mathbf{D}\left(\boldsymbol{v}_s\right)}_{\tau_s^{\mu}}$$

Contraintes "solide"

$$\sigma_s = -p_s Id + \alpha_s \left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - Id\right)$$

- Principe : $\mathbf{T} = -2\mu_f \mathbf{D}\left(\boldsymbol{v}_f\right) + \alpha_s \left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - Id\right)$ avec

$$2\mu_f \mathbf{D}\left(\boldsymbol{v}_f\right) = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right)\left(\sum_{\alpha} \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha \left(f_\alpha - f_\alpha^{eq}\right)\right)$$

- Modifier les fonctions d'équilibre

$$\tilde{f}_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \boldsymbol{v}}{c_s^2} + \frac{\left(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \frac{\mathbf{T}}{\rho}\right) : \left(\mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 I\right)}{2c_s^4}\right),$$

$$\Longrightarrow \Pi_{ij}^{\text{eq}} = \sum_{\alpha} \tilde{f}_\alpha^{\text{eq}} c_{\alpha i} c_{\alpha j} = \rho v_i v_j + \rho c_s^2 \delta_{ij} + T_{ij}$$

- conséquence

$$\rho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \rho_s \left(\boldsymbol{v}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_s\right) = -\nabla p_s + \nabla \cdot \tau_s^{\mu} + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_s \text{ in } \Omega_s$$

Algorithme

Algorithm 1 Sur un pas de temps

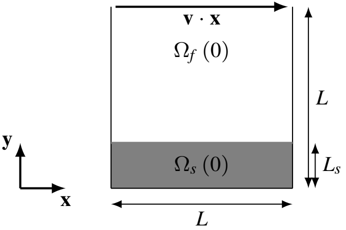
$\rho(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $H(t)$ et $\mathbf{d}(t)$ sont connus,

1. Calcul de $\mathbf{T} = \tau_s^\nu - \mu_s \left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - Id\right)$
2. Calcul de $\rho(t + \triangle t)$ et $\mathbf{v}(t + \triangle t)$ (LBM pour Navier-Stokes) avec

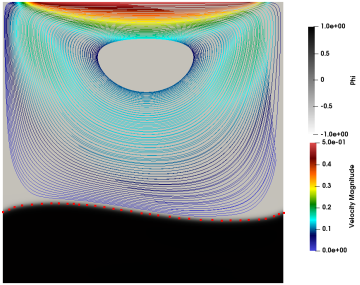
$$f_\alpha^{\mathrm{eq}} = (1 - H) f_\alpha^{\mathrm{eq}} + H \tilde{f}_\alpha^{\mathrm{eq}} \tag{11}$$

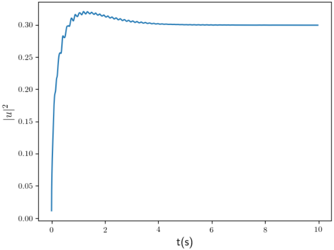
3. Calcul de $\mathbf{d}(t + \Delta t)$
4. Calcul de $\phi(t + \Delta t)$ and $H(t + \Delta t)$ (LBM pour Cahn-Hilliard))

Exemple 1

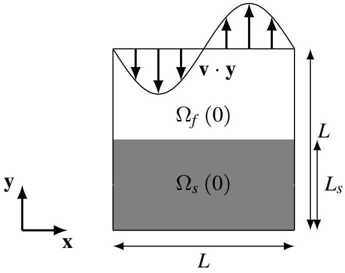


$$L = 2 \text{ cm}$$
$$L_s = 0.5 \text{ cm}$$
$$\rho_f = \rho_s = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$
$$\nu_f = 0.2 \text{ dyn} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2}$$
$$\mu_s = 0.2 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$$



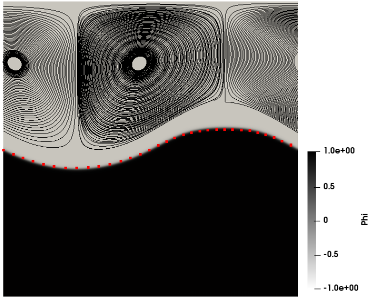


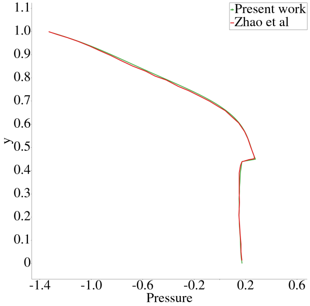
Exemple 2



$L = 1$ m, $L_s = 0.5L$, $V_0 = 1$ m $\cdot$ s^{-1}, $\rho_f = \rho_s =$ 1 kg $\cdot$ m^{-3}, $\nu_f = 0.001$ Pa $\cdot$ s, $\mu_s = 0.25$ Pa

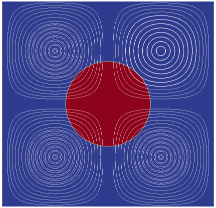
$$\mathbf{v}(x, L, t) = -U_0 (1 - \cos(2\pi t)) \sin(2\pi x)\, \mathbf{y}$$



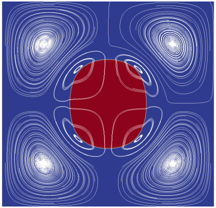


Exemple 3

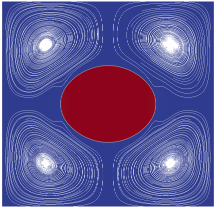
$\rho_s = \rho_f = 1\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}},\ \nu_f = 0.001\ \mathrm{Pa \cdot s},\ \mu_s = 1\ \mathrm{Pa}$, et $r = 0.2\mathrm{m}$



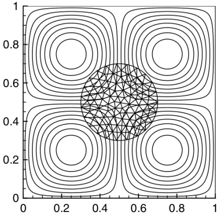
(c) Present work : $t = 0$ s



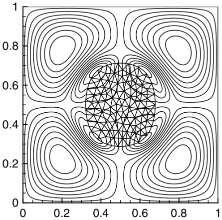
(d) Present work : $t = 0.5$ s



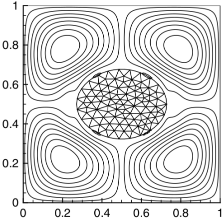
(e) Present work : $t = 1$ s



(f) Zhao *et al.* : $t = 0$ s



(g) Zhao *et al.* : $t = 0.5$ s

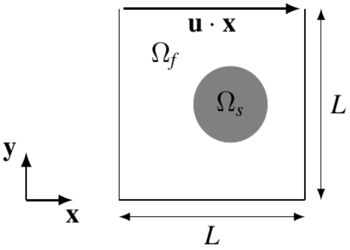


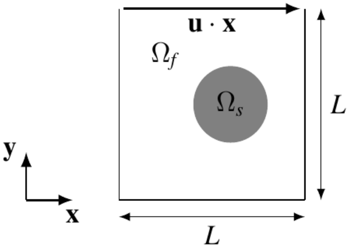
(h) Zhao *et al.* : $t = 1$ s

Figure – Application C - Comparison of results obtained with Zhao *et al.* [?]

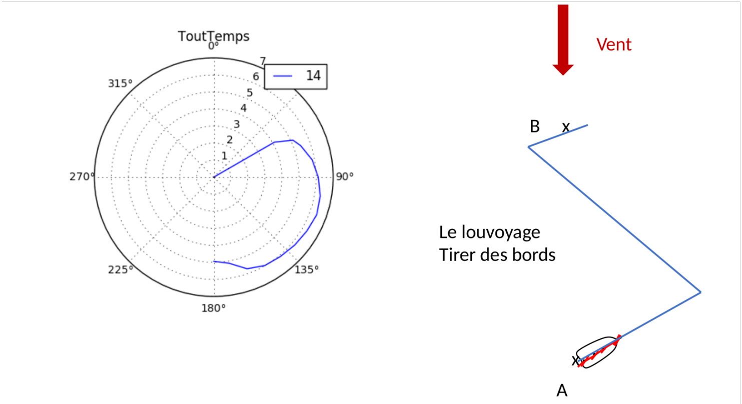
Conclusion et perspectives

- Adaptation de la LBM aux solides néo-hookéens incompressibles
  - pas de couplage de solveurs
  - modifications de l'opérateur de collision (via les fonctions d'équilibres)
- Application à des cas de la littérature
- Perspectives :
  - Extension aux solides en grandes transformations

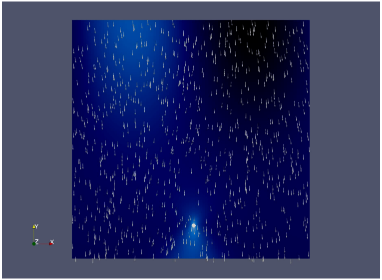


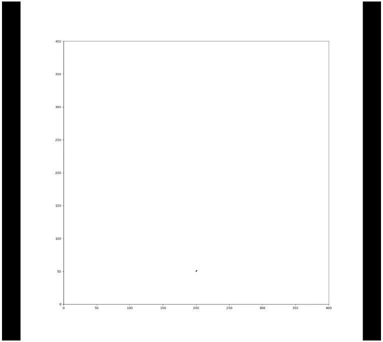


Routage ?

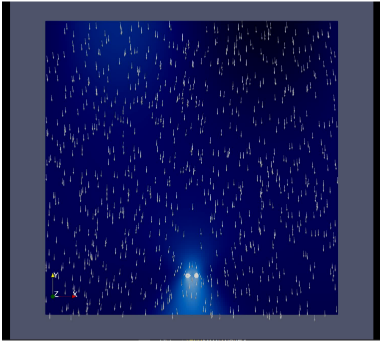

ToutTemps
0°
315°
270°
225°
180°
135°
90°
1
2
3
4
5
6
7
14
Vent
B
x
x
A
Le louvoyage
Tirer des bords

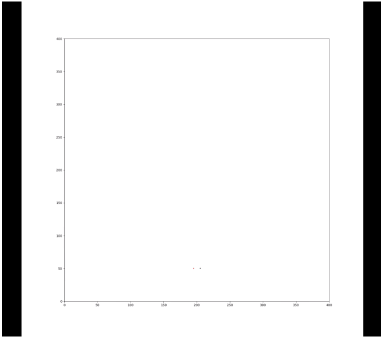
Routage ?


Y
Z
X


400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Routage ?


Y
Z
X


400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Performances actuelles sur cartes graphiques (GPU)

Maximum Grid Resolution for D3Q19 LBM

Memory	FP32/FP32	FP32/FP16
1 GB	224^3	264^3
2 GB	280^3	336^3
3 GB	320^3	384^3
4 GB	352^3	424^3
6 GB	404^3	484^3
8 GB	448^3	532^3
10 GB	480^3	572^3
11 GB	496^3	592^3
12 GB	512^3	608^3
16 GB	564^3	672^3
24 GB	644^3	768^3

Memory	FP32/FP32	FP32/FP16
32 GB	708^3	848^3
40 GB	764^3	912^3
48 GB	812^3	968^3
64 GB	896^3	1068^3
80 GB	964^3	1148^3
96 GB	1024^3	1220^3
128 GB	1128^3	1344^3
192 GB	1292^3	1540^3
256 GB	1420^3	1624^3
384 GB	1624^3	1624^3

Source : https ://github.com/ProjectPhysX/FluidX3D

Lehmann, M., Krause, M., Amati, G., Sega, M., Harting, J. and Gekle, S , *Accuracy and performance of the lattice Boltzmann method with 64-bit, 32-bit, and customized 16-bit number formats.*
Phys. Rev. E 106, 015308, (2022)